

УДК 519.246.8:550.344

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ.  
ЧАСТЬ 1. ОБЗОР МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА ХЕРСТА

С.А. Имашев, В.Н. Сычев

Проведен обзор основных методов оценки параметра Херста для исследования фрактальных свойств временных рядов.

*Ключевые слова:* фрактальный анализ; фрактальная размерность; параметр Херста; вейвлет-анализ.

FEASIBILITY ASSESSMENT OF APPLICATION OF FRACTAL ANALYSIS METHODS  
FOR GEOPHYSICAL DATA.  
PART 1: OVERVIEW OF HURST EXPONENT ESTIMATION METHODS

S.A. Imashev, V.N. Sychev

The article considers a review of main methods of Hurst exponent estimation for study of fractal properties of time series.

*Keywords:* fractal analysis; fractal dimension; Hurst parameter; wavelet analysis.

**Введение.** Считается, что сейсмический сигнал обладает стохастическими свойствами и, являясь проявлением комплексных динамических процессов, происходящих в недрах земли, несет в себе элементы хаоса [1, 2]. При этом сейсмический сигнал может быть описан в качестве самоафинного фрактала в пределах определенного диапазона временных масштабов [3, 4] с проявлением фрактальных свойств в нескольких высокочастотных диапазонах [2].

В общем случае, сейсмическая волна не является чистым фракталом, и не может быть описана одним значением фрактальной размерности во всем диапазоне масштабов. Однако особенность сейсмического сигнала, состоящая в том, что реальный сигнал является набором низкочастотных и высокочастотных компонент различной природы, дает возможность применять фрактальный анализ к соответствующим выделенным компонентам, как к самоафинным фракталам в диапазоне определенных масштабов [2], и позволяет получать дополнительную информацию из таких сигналов [3, 5, 6].

Особенностью фрактального анализа является то, что его можно использовать для сигналов, которые традиционными методами ковариационного и спектрального анализов не всегда удается иссле-

довать, из-за доминирования шумовой составляющей [3, 7–10].

Свойства сейсмического сигнала обычно исследуются с помощью, так называемого, параметра Херста –  $H$ . Этот параметр назван в честь одного из основоположников анализа фрактальных свойств временных рядов – британского гидролога Э. Херста, исследовавшего среднегодовой режим расхода воды в реках [11]. Эмпирический закон Херста заключался в выполнении соотношения:  $R(\tau)/S(\tau) \sim \tau^H$ , где  $R(\tau)$  – размах приращений наблюдаемой величины на временном интервале  $\tau$ ;  $S(\tau)$  – стандартное отклонение.

Метод Херста или, как чаще его называют, метод нормированного размаха или RS-метод [8, 11–13], широко используется для анализа сейсмических данных вследствие своей способности отличать шумовую компоненту от полезного сигнала [3, 14]. Кроме RS-метода широкое применение находят и другие методы оценки параметра Херста: метод средних вейвлет-коэффициентов – Average Wavelet Coefficients/Components (AWC) для случая непрерывного (CWT) и дискретного (DWT) вейвлет-преобразований [13, 15]; метод анализа флуктуаций после исключения масштабно-зависимых трендов – Detrended Fluctuation Analysis (DFA) [12, 16, 17]; метод, основанный на дискретной

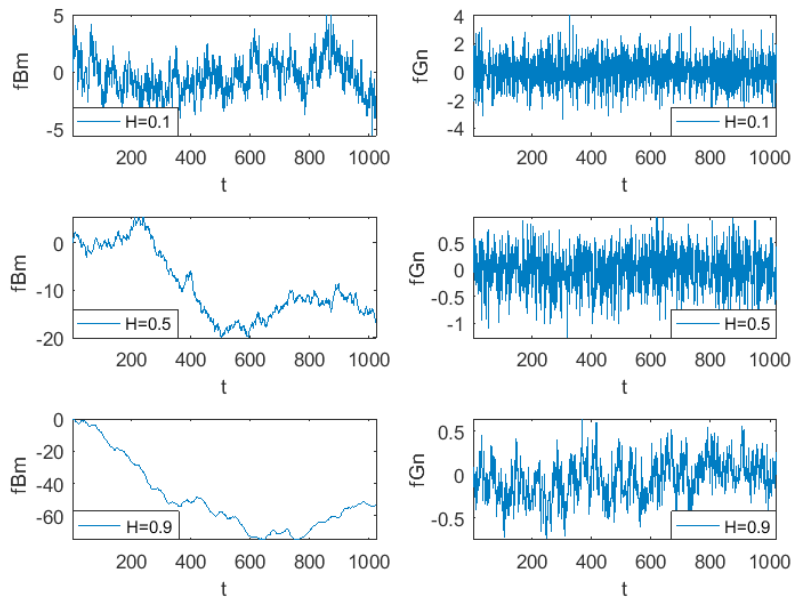


Рисунок 1 – Фрактальное броуновское движение (слева) и соответствующий им фрактальный гауссовский шум (справа) для различных значений параметра Херста

производной второго порядка – Discrete Second-Order Derivative (DSOD) [18] и его вейвлет-версия (WDSOD) [19]; метод дисперсии детализирующих коэффициентов – Wavelet Details Regression Estimation (WDRE) [20].

**Методика.** Для определения оптимального метода оценки параметра Херста был синтезирован набор модельных сигналов, которые представляют собой обобщенное броуновское движение с заданным значением параметра Херста в диапазоне 0,1–1 согласно алгоритму Абри-Селана [21]. Необходимо отметить, что на вход рассматриваемых алгоритмов (кроме RS-метода) подается сигнал в виде фрактального броуновского движения (Fractal Brownian Motion – fBm), график которого можно интерпретировать как координату частицы при одномерном броуновском блуждании. Если же этот сигнал преобразовать во временной ряд, который формируется из самих значений случайных шагов частицы, а не накопленной траектории, то получаемый сигнал имеет вид шума, и называется фрактальным гауссовским шумом (Fractal Gaussian Noise – fGn). На рисунке 1 приведены графики фрактального броуновского движения (fBm) и соответствующего им фрактального гауссовского шума (fGn) для значений параметра Херста  $H=0.1$ ,  $H=0.5$  и  $H=0.9$ . Параметры синтеза: длина – 1000 отсчетов, уровень декомпозиции – 6, вейвлет – Добеши 10-порядка. На рисунке видно, что при увеличении значения параметра Херста происходит уменьшение амплитуды и общего вклада (энергии) высокочастотных компонент.

В этом случае параметр Херста будет характеризовать меру изрезанности, шероховатости сигнала [8]. При этом эти различия видны более отчетливо при исследовании сигнала в виде фрактального броуновского движения (рисунок 1, слева) нежели в шумовом представлении (рисунок 1, справа).

При этом если сравнивать сигналы fBm ( $H = 0.5$ ,  $H = 0.9$ ) с fGn ( $H = 0.1$ ,  $H = 0.5$ ), различия видны визуально. Однако если взять два случая fBm ( $H = 0.1$ ) и fGn ( $H = 0.9$ ), то, не считая различий в масштабе (что не влияет на само значение параметра Херста), эти два сигнала можно отнести к одной группе. И действительно, RS-метод в первом случае дает значение  $H = 0.863$ , а во втором  $H = 0.887$ , хотя первый генерировался с параметром Херста, равном 0.1. Отсюда следует, что форма сигнала не всегда является основанием для отнесения исследуемого сигнала в ту или иную группу (fBm или fGn), и необходима более подробная информация о природе сигнала или предварительная проверка для адекватного применения того или иного метода оценки фрактальных свойств исследуемого сигнала. В качестве такой проверки можно использовать алгоритм DFA [16, 17], для чего необходимо на вход метода DFA подать исследуемый сигнал, и по рассчитанному значению показателя  $\alpha$  судить о принадлежности сигнала к той или иной группе. Если значение  $\alpha > 1$ , то, вероятнее всего, сигнал принадлежит группе fBm, если  $\alpha < 1$  – к группе fGn, и, наконец, если  $\alpha \approx 1$ , необходимо дальнейшее исследование с применением методов оценки тренда (line-detrended scaled windowed analysis

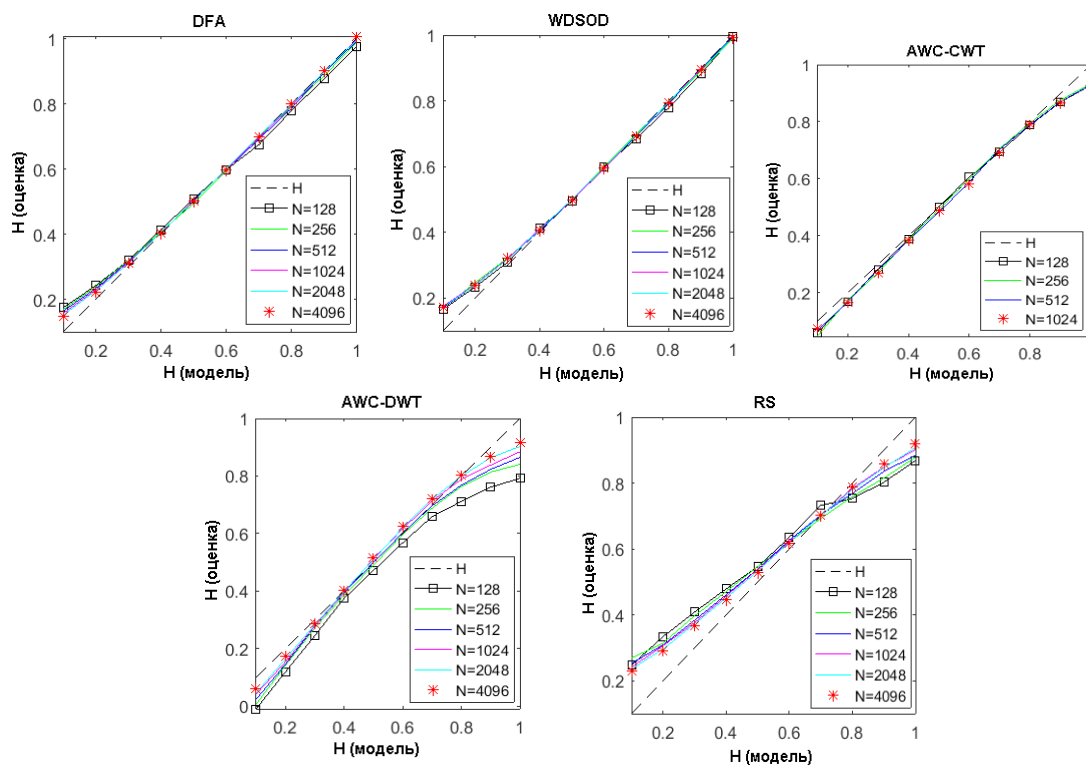


Рисунок 2 – Оценка параметра Херста модельных сигналов различной длины и значений  $H$  (0.1–1)

(ldSWV) или bridge-detrended scaled windowed analysis (bdSWV)) [22]. После выяснения типа сигнала появляется возможность использования того или иного метода с предварительной обработкой исходного сигнала или без нее. Так, например, если сигнал является шумоподобным fGn, то для использования RS-метода сигнал не нуждается в предварительном преобразовании, которое в свою очередь необходимо для анализа сигнала методами DFA, AWC, DSOD, WDSOD и WDRE. И наоборот, если сигнал представлен в виде накопления (fBm), то для RS-метода его необходимо предварительно преобразовать в шумоподобный вид (fGn). Для сигналов fBm ( $H = 0.5$  и  $H = 0.9$ ) DFA-метод дал значения  $\alpha$  равные 1.512 и 1.864, соответственно, что соответствует их группе фрактального броуновского движения.

Для выбора оптимального метода для задач исследования монофрактальных и мультифрактальных свойств сейсмических сигналов было решено провести проверку указанных выше методов на модельных сигналах с заранее заданным параметром Херста. Генерация модельных сигналов была произведена с использованием встроенной функции wfbm пакета Matlab, в диапазоне значений  $H = 0.1–0.9$  и длиной сигнала  $N = 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096$ . Так как генерировался сигнал конечной длины, со случайным начальным

состоянием генератора случайных чисел, то синтезировался набор из 500 сигналов с заданными параметрами и находилось среднее значение  $H$  для этой выборки. На рисунке 2 приведены результаты оценки параметра Херста модельных сигналов различными методами.

На рисунке 2 видно, что при увеличении длины исследуемого сигнала для методов DFA, RS, AWC-DWT уменьшается расхождение с модельными значениями, т.к. увеличивается количество точек для аппроксимации линейной регрессией. Для метода AWC-CWT использовался вейвлет Морле, который более подходит для этого алгоритма, т.к. хорошо регистрирует как высокочастотные, так и низкочастотные компоненты сигнала, а также обладает менее выраженным краевым эффектом [13]. Для варианта AWC в случае дискретного вейвлет-преобразования использовался вейвлет Добеши (db8) [15], при этом заметного изменения при увеличении порядка вейвлета замечено не было. Отметим, что для AWC в случае непрерывного вейвлет-преобразования в расчете используется больше точек для расчета линейной регрессии. Например, в случае длины сигнала  $N = 128$ , использовались 64 точки, тогда как дискретный вариант ограничен максимальным уровнем детализации равным  $L$ , так что  $2^L < N$ . Также нужно отметить, что реализация алгоритма WDRE в пакете

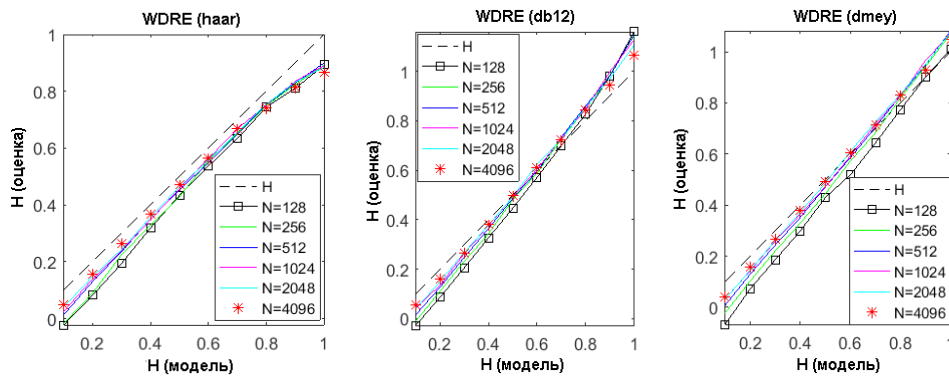


Рисунок 3 – Метод WDR с использованием вейвлета Хаара, Добеши 12-порядка и дискретного вейвлета Мейера

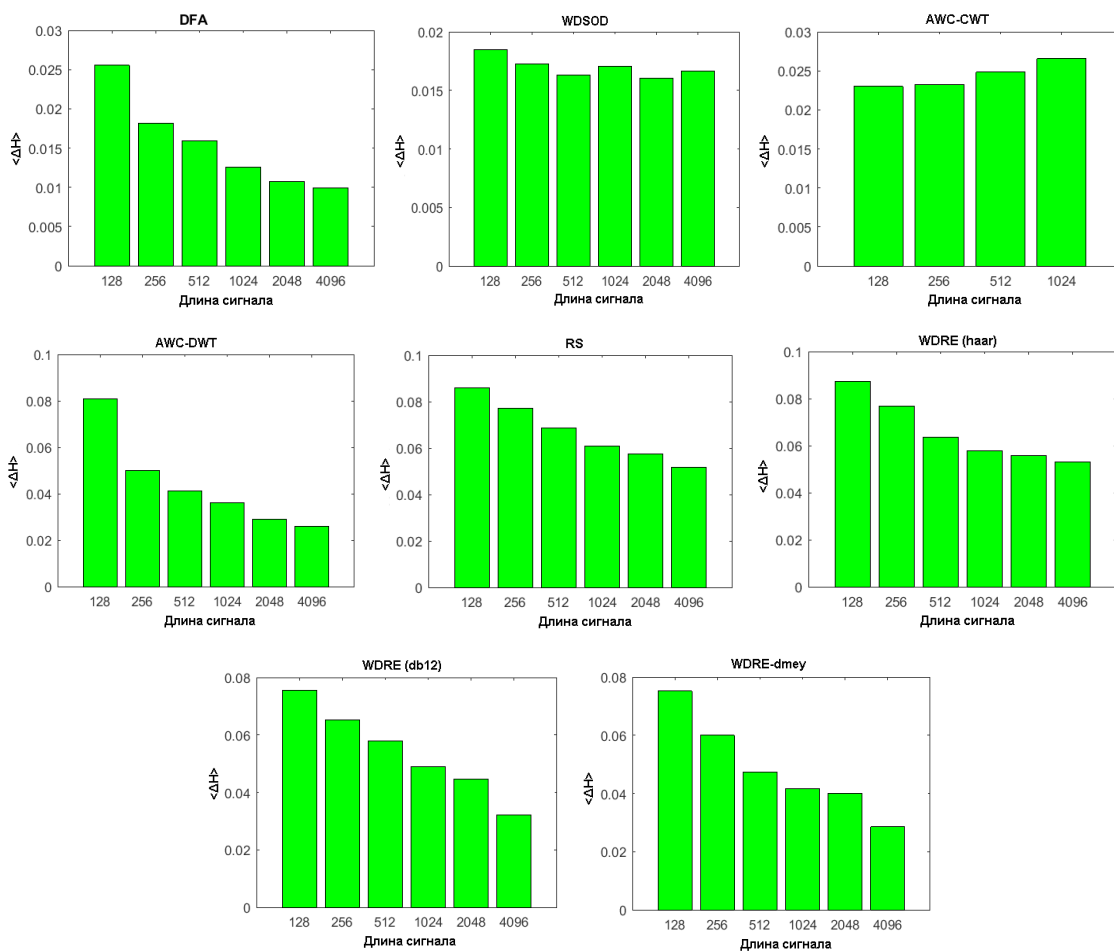


Рисунок 4 – Средняя величина погрешности оценки параметра Херста во всем диапазоне модельных значений  $\langle \Delta H \rangle$  для различных длин сигнала

Matlab основана на вейвлете Хаара, что дало постоянную недооценку значений параметра Херста. Расширение встроенной функции Matlab на случай использования других вейвлетов показало, что се-

мейство вейвлетов Добеши (db12) и дискретный вейвлет Мейера (dmey) дают более качественную оценку параметра Херста в широком диапазоне значений  $H$  и длин сигналов (рисунок 3).

Таблица 1 – Оценка параметра Херста модельных сигналов с  $H = 0.1-1$ , различными методами в скользящих окнах шириной  $N = 128, 256, 512$ 

H	Параметр	Метод					
		RS	AWC-CWT	AWC-DWT	WDRFE	DFA	WDSOD
<b>N=128</b>							
0.1	Ср.знач	0.289	0.09	-0.017	-0.037	0.201	<b>0.168</b>
	СКО	0.234	0.196	0.147	0.175	<b>0.071</b>	0.177
	Размах	1.569	0.793	0.942	1.077	<b>0.313</b>	0.805
0.5	Ср.знач	0.507	<b>0.496</b>	0.474	0.446	0.459	0.52
	СКО	0.306	0.125	0.127	0.191	<b>0.111</b>	0.133
	Размах	1.703	0.632	0.727	1.345	0.607	<b>0.535</b>
1	Ср.знач	0.924	0.913	0.812	1.123	<b>1.04</b>	0.958
	СКО	0.377	<b>0.092</b>	0.127	0.237	0.194	0.148
	Размах	2.561	<b>0.429</b>	0.874	1.446	1.067	0.667
<b>N=256</b>							
0.1	Ср.знач	0.268	<b>0.11</b>	-0.029	-0.077	0.192	0.149
	СКО	0.075	0.073	0.107	0.157	<b>0.04</b>	0.096
	Размах	0.479	0.457	0.729	0.913	<b>0.212</b>	0.427
0.5	Ср.знач	0.519	0.493	0.53	0.502	0.455	<b>0.501</b>
	СКО	0.07	0.091	0.115	0.142	<b>0.066</b>	0.072
	Размах	0.421	0.403	0.798	0.786	0.387	<b>0.351</b>
1	Ср.знач	0.962	0.948	0.905	1.096	1.07	<b>0.98</b>
	СКО	0.115	<b>0.062</b>	0.119	0.172	0.134	0.082
	Размах	0.595	<b>0.298</b>	0.967	1.07	0.676	0.349
<b>N=512</b>							
0.1	Ср.знач	0.241	0.031	-0.038	-0.074	<b>0.167</b>	0.178
	СКО	0.039	0.064	0.087	0.109	<b>0.009</b>	0.022
	Размах	0.227	0.371	0.527	0.721	<b>0.049</b>	0.092
0.5	Ср.знач	0.518	0.344	0.493	0.536	0.468	<b>0.504</b>
	СКО	0.032	0.106	0.094	0.068	<b>0.02</b>	0.035
	Размах	0.212	0.406	0.41	0.878	<b>0.098</b>	0.138
1	Ср.знач	0.997	1.007	0.832	0.984	1.12	<b>1.002</b>
	СКО	0.076	0.092	0.094	0.157	0.092	<b>0.031</b>
	Размах	0.316	0.388	0.374	0.926	0.338	<b>0.156</b>

На рисунке 4 представлена средняя величина погрешности оценки параметра Херста во всем диапазоне его модельных значений  $\langle \Delta H \rangle$  для различных длин сигнала.

Увеличение длины сигнала в случае монофрактала при использовании метода AWC-CWT не дает увеличения точности оценки и даже может ухудшить ситуацию из-за влияния краевого эффекта на больших значениях масштабного коэффициента вейвлета.

На рисунке 4 видно, что для дискретного вейвлета Мейера и Добеши (db12) увеличение длины сигнала ведет к более существенному уточнению оценки параметра Херста по сравнению с вейвлетом Хаара.

В таблице 1 представлены оценки параметра Херста только для модельных сигналов с  $H = 0.1, 0.5$  и  $1$ . Жирным выделены ячейки с наиболее близкими к модельным значениями и с наименьшими значениями среднеквадратичного отклонения и размаха.

Оценки показали, что наилучшие результаты имеют методы DFA и WDSOD, затем методы AWC-CWT, RS, AWC-DWT и WDRFE. Необходимо отметить, что RS-метод по мере увеличения ширины окна приближается по качеству оценки к DFA и WDSOD, тогда как метод AWC-CWT дает такие же или худшие показатели, что связано с влиянием значений больших масштабных коэффициентов.

Так как в оценке параметра Херста методами DFA и AWC-CWT заложены дополнительные вычислительные шаги: для DFA – аппроксимация полиномом, для AWC-CWT – вычисление вейвлет-коэффициентов, то эти алгоритмы показали наименьшее быстроедействие. В целом метод AWC-CWT в  $\sim 5$ , а DFA в  $\sim 50$  раз медленнее, чем методы RS и WDSOD.

Из рассмотренных методов наиболее легко реализуемыми являются методы RS и DFA, которые не требуют наличия специальных библиотек (например, расчета непрерывного и дискретного вейвлет-преобразования).

**Выводы.** Расчеты показали, что наиболее точные оценки параметра Херста в широком диапазоне значений, а также длин исследуемых сигналов дают следующие методы: анализ флуктуаций после исключения масштабно-зависимых трендов – Detrended Fluctuation Analysis (DFA); метод, основанный на дискретной производной второго порядка, адаптированный под дискретное вейвлет-преобразование – Wavelet Discrete Second-Order Derivative (WDSOD) и метод средних вейвлет-коэффициентов – Average Wavelet Coefficients/Components (AWC) для случая непрерывного преобразования с вейвлетом Морле. В целом метод AWC-CWT в  $\sim 5$ , а DFA в  $\sim 50$  раз медленнее, чем методы WDSOD и RS. Наиболее легко реализуемыми являются методы RS и DFA, причем последний позволяет выявить принадлежность исследуемого временного ряда к группе сигналов фрактального броуновского движения или фрактального гауссовского шума.

Исследование осуществлено в рамках выполнения государственного задания ИС РАН, тема № 78, а также частично поддержано грантом РФФИ 15-05-06857а.

#### Литература

1. *Turcotte D.L.* Fractals and chaos in geology and geophysics / D.L. Turcotte. New York: Cambridge University Press, 1997. 398 p.
2. *Cao M.-S.* A method of detecting seismic singularities using combined wavelet with fractal / M.-S. Cao, Q.-W. Ren, H.-H. Wang, T. Gong // *Chinese J. Geophys.* 2005. Vol. 48. N 3. P. 740–749.
3. *Любушин А.А.* Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга / А.А. Любушин. М.: Наука, 2007. 227 с.
4. *Goltz C.* Fractal and chaotic properties of earthquakes / C. Goltz // *Lecture notes in Earth sciences.* Vol.77. Berlin, London: Springer, 1998. 195 p.
5. *Gadre V.M., Dimri V.M., Chandrasekhar E.* Wavelets and fractals in earth system sciences / V.M. Gadre, V.M. Dimri, E. Chandrasekhar // Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 2014. 286 p.
6. *Nath S.K.* Detection of seismic reflections from seismic attributes through fractal analysis / S. K. Nath, P. Dewangan // *Geophys Prospect.* 2002. Vol. 50. N 3. P. 341–360.
7. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature / B.B. Mandelbrot. Oxford: Freeman, 1982. 468 p.
8. *Feder J.* Fractals / J. Feder. Springer, 1988. 284 p.
9. *Malamud B.D., Turcotte D.L.* Self-Affine Time Series: I. Generation and Analyses. / B.D. Malamud, D.L. Turcotte // *In Long-Range Persistence in Geophysical Time Series: Advances in Geophysics.* 1999. P. 1–90.
10. *Srivastava R.P.* Stochastic inversion of prestack seismic data using fractal-based initial models / R.P. Srivastava, M.K. Sen // *Geophysics.* 2010. Vol. 75. N 3. P. R47–R59.
11. *Hurst H.E.* Long-term storage: An experimental study / H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Simaika. London: Constable, 1965. 145 p.
12. *Weron R.* Estimating long-range dependence: Finite sample properties and confidence intervals / R. Weron // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2002. Vol. 312. N 1-2. P. 285–299.
13. *Чен Б.* Оценка параметра Херста по наклону энергетического спектра на основе вейвлет-преобразования / Б. Чен, С.А. Имашев // *Вестник КРСУ.* 2007. Т. 7. № 8. С. 65–75.
14. *Padhy S.* Rescaled range fractal analysis of a seismogram for identification of signals from an earthquake / S. Padhy // *Current science.* 2004. Vol. 87. N 5. P. 637–641.
15. *Simonsen I.* Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transforms / I. Simonsen, A. Hansen, O.M. Nes // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. N 3. P. 2779–2787.
16. *Peng C.-K.* Mosaic organization of DNA nucleotides / C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, A.L. Goldberger // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. N 2. P. 1685–1689.
17. *Kantelhardt J.W.* Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis / J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H. Rego, S. Havlin, A. Bunde // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2001. Vol. 295. N 3, 4. P. 441–454.
18. *Istas J.* Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process / J. Istas, G. Lang // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics.* 1997. Vol. 33. N 4. P. 407–436.
19. *Jiménez A.* Testing the persistence in earthquake catalogs: The Iberian Peninsula / A. Jiménez, K.F. Tiampo, S. Levin, A.M. Posadas // *Europhys. Lett.* 2006. Vol. 73. N 2. P. 171–177.
20. *Abry P.* Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens / P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, D. Veitch // *Theory and applications of long-range dependence.* 2003. P. 527–556.
21. *Abry P.* The Wavelet-Based Synthesis for Fractional Brownian Motion, Proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and Fast Implementation / P. Abry, F. Sellan // *Applied and Computational Harmonic Analysis.* 1996. Vol. 3. N 4. P. 377–383.
22. *Seuront L.* Fractals and multifractals in ecology and aquatic science / L. Seuront. Boca Raton, Fla.: CRC; 2010. 360 p.