УДК 531.8

МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ЖЕСТКОЙ ПЛИТОЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В.К. Манжосов, И.А. Новикова

На основе методов планирования эксперимента проанализированы экспериментальные данные о контакте сферического тела с жесткой плитой.

Ключевые слова: контактная деформация; планирование эксперимента; математическая модель.

MODEL INTERACTION OF THE SPHERICAL BODY WITH RIGID PLATE UNDER STATIC LOADING

V.K. Manzhosov, I.A. Novikova

On the basis of planning methods of an experiment experimental data about contact of the spherical body with a tough plate are analyzed.

Keywords: contact deformation; experimental design; mathematical model.

Исследования продольного удара связаны с описанием контактного взаимодействия соударяемых тел. Для обеспечения центрального удара контактирующим поверхностям придают, как правило, сферическую форму. При упругом ударе тел со сферическими поверхностями наиболее часто используют статическую модель контактного взаимодействия Герца [1–5].

В основе построения такой модели лежат гипотезы, предполагающие, что при взаимодействии соударяющихся тел существенными являются местные деформации в зоне контакта, и что зависимость контактной силы от контактной деформации при ударе такая же, как и при статическом сжатии.

Если обозначить через α сближение центров масс соударяющихся тел, то контактная сила определяется выражением

$$P_k = \begin{cases} k(\alpha)^{3/2}, \text{ при } \alpha \ge 0, \\ 0\,, \qquad\quad \text{ при } \alpha < 0, \end{cases}$$

$$k = \frac{4}{3[(1-\mu_1^2)/E_1 + (1-\mu_2^2)/E_2]}\sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}\,,$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от кривизны поверхностей тел в точке контакта и свойств материала; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхностей контакта соударяющихся тел; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона материала соударяющихся тел; E_1, E_2 – модули упругости материала.

Модель В.Л. Бидермана – М.Н. Малюковой линеаризует эту зависимость так [1], чтобы обеспечивалось равенство работы контактной силы при сближении соударяемых тел, чтобы были равны максимальные сближения α_{max} и максимальные значения силы $(P_k)_{max}$:

$$\int_0^{\alpha_{max}} P_k d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} k\alpha^{3/2} d\alpha = \frac{2}{5}k\alpha_{max}^{5/2}\,, \quad P_k = k^*(\alpha - \alpha_0)\,,$$

$$k^* = \frac{5}{4}k\alpha_{max}^{1/2}\,.$$

Б.Н. Стихановским [4, 5] предложена феноменологическая модель контактного взаимодействия при ударе тел со сферическими поверхностями, когда показатель степени для α является переменной величиной, зависящей от величины контактной силы:

$$P_k = K_c(\alpha/\alpha_0)^{\frac{3}{2+b_p P_k}}\,, \; K_c = \frac{\pi}{2}p_0\left(3\pi R_0 \frac{p_0}{E_0}\right)^2,$$

$$b_p = \frac{p_0}{p_T(P_k)_{max}}\,,$$

$$p_0 = p_T \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{9 p_T^2 R_0^2}{2(P_k)_{\max} E_0}} \right)^{-1},$$

$$E_0 = \frac{E_1 E_2}{(1-\mu_1^2)E_2 + (1-\mu_2^2)E_1}.$$

При малых значениях P_k показатель степени $3/(2+b_p P_k)$ близок к значению 3/2, при больших значениях P_k показатель степени стремится к 1. Процедура расчета предполагает наличие сведений, для которых необходимы экспериментальные данные.

В настоящей работе на основе методов планирования эксперимента анализируются экспериментальные данные о контактном взаимодействии сферического тела с жесткой плитой, когда возникают пластические деформации. В качестве опытных образцов были выбраны шаровидные тела различного диаметра.

Рассматривается многофакторная система, где функцией отклика является величина сближения шара и плиты ($\alpha = y$), а факторами выбраны: сила F, прижимающая шар к плите, диаметр сферы D и твердость материала HB: $y = f(F, D, HB)$.

Уровни варьирования факторов представлены в таблице 1.

При проведении полнофакторного эксперимента (ПФЭ) факторы варьируются на двух уровнях (нижнем и верхнем) и реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

В таблице 2 представлена матрица планирования эксперимента ПФЭ 2^3.

Производя операцию кодирования факторов с учетом выбранных пределов их изменения в эксперименте, уравнение записывается в виде ряда:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i X_i + \sum_{i \neq j}^{N} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i \neq j \neq q}^{N} b_{ijq} X_i X_j X_q + \ldots,$$

где члены b_0, b_i, $b_{i,j}$, $b_{i,jq}$ – оценки для теоретических коэффициентов регрессии, а X_i, $X_{,j}$, X_q – отдельные факторы и их парные эффекты взаимодействия.

Сводная таблица результатов параллельных опытов ПФЭ 2^3 показана в таблице 3.

Таблица 1 – Уровни варьирования факторов

Уровни варьирования факторов в кодированных единицах (i = 1,2,3)	Факторы в натуральных единицах		
	сила F, 10^3 Н	диаметр сферы D,10^{-3} м,	твердость материала, НВ
–1	110	45	159
0	200	60	178
+1	290	75	197

Таблица 2 – Матрица планирования эксперимента ПФЭ 2^3

№ п/п	Факторы в кодированных единицах				Факторы в натуральных единицах		
	X_0	X_1	X_2	X_3	сила F, 10^3 Н	диаметр сферы D, 10^{-3} м	твердость материала
1	+1	-1	-1	-1	110	45	159
2	+1	+1	-1	-1	290	45	159
3	+1	-1	+1	-1	110	75	159
4	+1	+1	+1	-1	290	75	159
5	+1	-1	-1	+1	110	45	197
6	+1	+1	-1	+1	290	45	197
7	+1	-1	+1	+1	110	75	197
8	+1	+1	+1	+1	290	75	197

Таблица 3 – Сводная таблица результатов опытов ПФЭ 2^3

№ п/п	Значение функции отклика y при дублировании опытов, мм					Среднее знач. упруго-пластич. деформации, мм	Дисперсия	Среднеквадр. отклонение
	y_{N_1}	y_{N_2}	y_{N_3}	y_{N_4}	y_{N_5}	$\overline{y}_N$	S_N^2	
1	0,51026	0,54779	0,52254	0,54408	0,55401	0,5357	0,000274	0,016564
2	1,45375	1,58956	1,47746	1,56297	1,44634	1,5060	0,003466	0,058875
3	0,40485	0,39174	0,36802	0,36999	0,39486	0,3859	0,000209	0,014466
4	1,20703	1,27741	1,31505	1,25714	1,31807	1,2749	0,001681	0,040995
5	0,38866	0,36386	0,38812	0,38184	0,40634	0,3858	0,000187	0,013657
6	1,15704	1,25385	1,12602	1,18171	1,21097	1,1859	0,001936	0,044004
7	0,4134	0,40682	0,41666	0,40336	0,40368	0,4088	2,85E-05	0,005342
8	1,16437	1,1129	1,1278	1,14303	1,16471	1,1426	0,000413	0,020317

Матрица планирования эксперимента, представленная в таблице 2, содержит столбец с фиктивной переменной X_0, которой во всех опытах придается значение $+1$. Столбец X_0 предназначен для последующего расчета коэффициента b_0.

На первом этапе построчные дисперсии и средние выхода в строках плана определяются по формулам:

$$\overline{y}_N = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{N_j}, \quad S_N^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{N_j} - \overline{y}_N)^2,$$

где $m = 5$ – число повторов, а $N = 1,2,3...n$ – число опытов в плане.

Вычисления построчных дисперсий представлены в таблице 3.

Среднеквадратическое отклонение по каждой серии опытов определялось как

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{N_j} - \overline{y}_N)^2}.$$

Для исключения грубых промахов использовался критерий вариационного размаха.

Для определения равноточности измерений во всех строках плана использовался G – критерий Кохрена. В качестве выборочной статистики для критерия Кохрена используется отношение максимальной дисперсии из заданного ряда к сумме всех дисперсий этого ряда: $G_p = S_{N\max}^2 / \sum_{N=1}^{n} S_N^2$.

По данным таблицы 3 следует, что максимальное значение дисперсии равно $S_N^2 = 0,003466$. Тогда $G_p = 0,42298873$.

Полученное значение G_p сравнивается с табличным значением G-распределения Кохрена ($G_{кр} = 0,431$). Так как $G_p < G_{кр}$, то экспериментальные данные не опровергают гипотезу об однородности ряда дисперсий. По результатам расчета гипотеза об однородности дисперсий принята с доверительной вероятностью 95 %.

Для количественной оценки ошибок эксперимента определена дисперсия воспроизводимости как среднеарифметическая построчных дисперсий:

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{N=1}^{n} S_N^2 = \frac{1}{n(m-1)}\sum_{N=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_{N_j} - \overline{y}_N)^2 =$$

$$= 1,281 \cdot 10^{-3}.$$

При расчете коэффициентов регрессии использовался метод наименьших квадратов:

$$b_0 = \frac{1}{\sum_{N=1}^{n} X_{iN}^2} \cdot \sum_{N=1}^{n} X_{0N}\overline{y}_N = \frac{1}{n}\sum_{N=1}^{n} X_{0N}\overline{y}_N,$$

$$b_i = \frac{1}{n}\sum_{N=1}^{n} X_{iN}\overline{y}_N, \quad b_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{N=1}^{n} X_{iN}X_{jN}\overline{y}_N,$$

где X_{iN} – величина, расположенная на пересечении i – столбца и N – й строки матрицы планирования.

Коэффициенты регрессии имеют следующие значения: $b_0 = 0,8532$; $b_1 = 0,4242$; $b_2 = -0,0502$; $b_3 = -0,0724$; $b_{12} = -0,0185$; $b_{13} = -0,0407$; $b_{23} = 0,0451$.

Проверка численного расчета коэффициентов осуществлена с использованием следующего равенства: $\sum_{N=1}^{n} y_N^2 = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2$.

Нахождение статистической значимости проводится по t – критерию Стьюдента. Для определения дисперсии коэффициентов использовано выражение:

$$S_{bi}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{N=1}^{n} x_{iN} \cdot S_{yN}^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{S_y^2}{m}\sum_{N=1}^{n} x_{iN} =$$

$$= \frac{S_y^2}{n \cdot m} = \frac{1.281 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 5} = 3,20102 \cdot 10^{-5}.$$

Эффект взаимодействия всех трех факторов оказался сравним с уровнем «шума». Математическая модель процесса взаимодействия шаровидного тела с жесткой плитой, когда происходит нагружение, в кодированных переменных имеет вид:

$$y = 0,8532 + 0,4242X_1 - 0,0502X_2 -$$
$$-0,0724X_3 - 0,0185X_1X_2 -$$
$$-0,0407X_1X_3 + 0,0451X_2X_3.$$

Предсказанные уравнением регрессии значения выходной величины $y_1 = 0,5376$; $y_2 = 1,5042$; $y_3 = 0,3840$; $y_4 = 1,2768$; $y_5 = 0,3839$; $y_6 = 1,1878$; $y_7 = 0,4106$.

Разброс построчечных средних относительно предсказанных по уравнению регрессии равен:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{m}{n-d}\sum_{N=1}^{n}(\bar{y}_N - \hat{y}_N)^2 = 1,3788 \cdot 10^{-4},$$

где d – число коэффициентов модели после оценки их значимости.

Расчетное значение критерия Фишера равно:

$$F_p = S^2_{\text{ад}} / S^2_y = 1,3788 \cdot 10^{-4} / 1,280 \cdot 10^{-3} = 0,107684 \cdot$$

Табличное значение критерия Фишера равно 4,15. Математическая модель удовлетворяет условиям адекватности для уровня значимости 0,05.

Математическая модель процесса взаимодействия шаровидного тела с жесткой плитой в натуральных переменных при нагружении для диапазона факторов $F \in (110 \cdot 10^3;\, 200 \cdot 10^3;\, 290 \cdot 10^3)$ Н, $D \in (45 \cdot 10^{-3};\, 60 \cdot 10^{-3};\, 75 \cdot 10^{-3})$м, $HB \in (159;\, 178;\, 197)$ имеет следующий вид (значение y определено в мм):

$$y = 1,468203 + 9,7669 \times 10^{-6} \cdot F - 28,7611 \times$$
$$\times D - 0,00854 \cdot HB - 1,367 \cdot 10^{-5} \times F \times$$
$$\times D - 2,3786 \times 10^{-8} \times F \times HB + 0,158151 \times D \times HB.$$

Преобразуем уравнение регрессии в натуральных переменных к виду

$$y = \delta \times F + y_0,$$
$$\delta = 9,7669 \times 10^{-6} - 1,367 \times 10^{-5} \times$$
$$\times D - 2,3786 \times 10^{-8} \times HB,$$
$$y_0 = 1,468203 - 28,7611 \cdot D -$$
$$-0,00854 \cdot HB + 0,158151 \cdot D \cdot HB.$$

Величина δ определяет податливость контакта, которая уменьшается с увеличением диаметра D и твердости HB. Значение y_0 определяет несовершенство контакта из-за наличия микронеровностей на реальных контактирующих поверхностях. При $F \geq F_{\min} = 110$ кН значение $y_0 = \text{const}$, при $0 \leq F \leq F_{\min}$ значение $y_0 = y_0(F)$ и зависит от F. Построение модели $y_0 = y_0(F)$ для диапазона $0 \leq F \leq F_{\min}$ требует специального исследования.

При разгрузке и наличии пластических деформаций можно в первом приближении пренебречь упругой составляющей и принять значение $F = 0$.

Результаты исследования показали, что для рассмотренного диапазона параметров прослеживается практически линейная зависимость силы от величины сближения при возникновении пластических деформаций.

Коэффициенты полинома в кодированных единицах указывают на степень влияния факторов. Анализ полученного выражения показывает, что наибольшее влияние на величину деформации при нагружении оказывает сила F, причем ее увеличение ведет к увеличению деформации (знак перед коэффициентом положительный). Значения коэффициентов перед x_2 и x_3 свидетельствуют о приблизительном равенстве влияния, как диаметра, так и твердости, причем уменьшение этих параметров ведет к увеличению деформации.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/ 232 Минобрнауки России

Литература

1. *Бидерман В.Л.* Усилия и деформации при продольном ударе / В.Л. Бидерман, Р.П. Малюкова // Расчеты на прочность. Вып. 10. М.: Машиностроение, 1964. С. 261–306.
2. *Шостенко Д. Н.* Контактное сжатие и соударение двух упруго-пластичных тел: дис. ... канд. техн. наук / Д.Н. Шостенко. Великий Новгород, 2004. 169 с.
3. *Rossikhin Y.A.* Dynamic response of spherical shells impacted by falling objects / Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, V. Shamarin // International journal of mechanics. Iss. 3. Vol. 5. 2011. P. 166–181.
4. *Родионов А.И.* Исследование соударений деформируемых тел при малых и средних скоростях: дис…канд. физ.-мат.. наук / А.И. Родионов. Новосибирск, 1986. 363 с.
5. *Стихановский Б.Н.* Исследование процессов соударения и создание машин, стендов и устройств ударного действия: дис. … д-ра. техн. наук / Б.Н. Стихановский. Л., 1981. 455 с.