УДК 517.968.7

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

В.Т. Мураталиева

На примерах показано, что среди вольтерровских интегро-дифференциальных уравнений с производной первого порядка с параметром спектральные свойства имеются у уравнений с квадратичным сомножителем при производной.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; линейное уравнение; уравнение типа Вольтерра; уравнение третьего рода; спектр.

SPECTRAL PROPERTIES OF VOLTERRA LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

V.T. Muratalieva

It is shown by examples that among Volterra linear integro-differential equations with the derivative of the first order with parameter spectral properties are available for the equations with quadratic coefficient by the derivative.

Keywords: integro-differential equation; linear equation; Volterra equation; equations of the third kind; spectrum.

1. Постановка задачи. В [1] выявлены спектральные свойства уравнений вида

$$tu(t) + \lambda \int_0^t u(s)ds = f(t), \ t \in R_+ := [0, \infty), \tag{1}$$

и систем двух таких уравнений вида

$$t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \lambda \int_0^t \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \ t \in R_+. \tag{2}$$

Здесь и далее – заданные функции – целые аналитические [2], заданные константы – комплексные числа; λ – параметр.

Производился поиск условий, при которых уравнения (1) и (2) имеют решения в пространстве целых аналитических функций, то есть представимые в виде рядов

$$u(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + ..., \tag{3}$$

$$v(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + ..., \tag{4}$$

где сходимость такого же порядка, как для рядов, представляющих функции $f(t), g(t)$.

Доказано, что спектр таких уравнений либо отсутствует, либо состоит из кратных некоторому числу или числам.

В данной статье такие же вопросы рассматриваются для уравнений вида

$$tu'(t) + \int_0^t k\, u(s)ds = f(t), \ t \in R_+, \tag{5}$$

$$t^2 u'(t) + \int_0^t k\, u(s)ds = f(t), \ t \in R_+, \tag{6}$$

$$t^p u'(t) + \int_0^t k\, u(s)ds = f(t),\ t \in R_+, \tag{7}$$

где $p > 2$ – натуральное число;

$$t^2 u'(t) + \lambda \int_0^t K(t) u(s)ds = f(t),\ t \in R_+, \tag{8}$$

$K(t)$ – целая аналитическая функция.

Полагая $t = 0$ в этих уравнениях, получим, что обязательное условие $f(0) = 0$, откуда

$$f(t) = f_1 t + f_2 t^2 + ..., \tag{9}$$

2. Частные случаи скалярных интегро-дифференциальных уравнений

2.1. Уравнение с линейным сомножителем при производной. Подставляя (3) и (9) в (5), получаем:

$$t(u_1 + 2u_2 t + \ldots) + \int_0^t k\,(u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \ldots)ds = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Преобразуем:

$$u_1 t + 2u_2 t^2 + \ldots + k u_0 t + \frac{k}{2} u_1 t^2 + \frac{k}{3} u_2 t^3 + \ldots = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях *t*, получаем:

$$u_1 + k u_0 = f_1,\ 2u_2 + \frac{k}{2} u_1 = f_2,\ 3u_3 + \frac{k}{3} u_2 = f_3,\ \ 4u_4 + \frac{k}{4} u_3 = f_4, \tag{10}$$

Отсюда следует

Теорема 1. Аналитическое решение уравнения (5) существует при всех *k* и зависит от одной произвольной постоянной u_0. Оно получается по рекуррентной формуле $u_n = \frac{f_n}{n} - \frac{k u_{n-1}}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2.2. Уравнение с квадратичным сомножителем при производной. Подставляя (3) и (9) в (6), получаем:

$$t^2 (u_1 + 2u_2 t + \ldots) + \int_0^t k\,(u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \ldots)ds = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Преобразуем:

$$u_1 t^2 + 2u_2 t^3 + \ldots + k u_0 t + \frac{k}{2} u_1 t^2 + \frac{k}{3} u_2 t^3 + \ldots = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях t, получаем:

$$k u_0 = f_1,\ u_1 + \frac{k}{2} u_1 = f_2,\ 2u_2 + \frac{k}{3} u_2 = f_3,\ 3u_3 + \frac{k}{4} u_3 = f_4, \tag{11}$$

Отсюда следует

Теорема 2. Если *k* не принадлежит последовательности

$$-2, -6, -12, ..., -n(n+1), ..., \tag{12}$$

то уравнение (6) имеет единственное аналитическое решение, иначе оно либо имеет бесконечное количество аналитических решений, либо не имеет аналитического решения.

Если *k* не принадлежит последовательности (12), то единственное аналитическое решение уравнения (6) имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{k} f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+1) + k} f_{n+1} t^n .$$

Если $(\exists m)(k = -m(m+1))$ и $(f_{-k+1} = 0)$, то бесконечное количество аналитических решений выражается формулой

$$u(t) = \frac{1}{k} f_1 + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+1)+k} f_{n+1} t^n + \gamma t^m, \gamma = const .$$

Если $(\exists m)(k = -m(m+1))$ и $(f_{-k+1} \neq 0)$, то аналитические решения уравнения (6) отсутствуют.

2.3. Уравнение со степенным сомножителем при производной

Предположим, что $k \neq 0$. Подставляя (3) и (9) в (7), получаем:

$$t^p (u_1 + 2u_2 t + \ldots) + \int_0^t k (u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \ldots) ds = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Преобразуем

$$u_1 t^p + 2u_2 t^{p+1} + \ldots + k u_0 t + \frac{k}{2} u_1 t^2 + \frac{k}{3} u_2 t^3 + \ldots = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях *t*, получаем: $k u_0 = f_1$,

$$\frac{k}{2} u_1 = f_2, \ \frac{k}{p-1} u_{p-2} = f_{p-1}, \ u_1 + \frac{k}{p} u_{p-1} = f_p, \ 2u_2 + \frac{k}{p+1} u_p = f_{p+1},$$

$$3u_3 + \frac{k}{p+2} u_{p+1} = f_{p+2}, \tag{13}$$

Отсюда следует

Теорема 3. Если $k \neq 0$, то уравнение (7) имеет единственное аналитическое решение. Оно получается по формулам

$$u_0 = \frac{1}{k} f_1, u_1 = \frac{2}{k} f_2, u_{p-2} = \frac{p-1}{k} f_{p-1},$$

и по рекуррентной формуле

$$u_n = \frac{n+1}{k} \left(f_{n+1} - (n - p + 2)\, u_{n-p+2} \right), \quad n = p-1, p, p+1, \ldots$$

3. Спектральные свойства интегральных уравнений с квадратичным сомножителем при производной. Из результатов предыдущего раздела следует, что наиболее интересным в спектральном отношении является случай (6). Поэтому рассмотрим уравнение (8), где

$$K(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 \ldots, \ k_0 \neq 0 \tag{14}$$

(при $k_0 = 0$ нужно требовать $f_1 = 0$ и т. д.)

Подставляя (3), (9) и (14) в (8), получаем:

$$t^2 (u_1 + 2u_2 t + \ldots) + \lambda (k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots) \int_0^t (u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \ldots) ds = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Преобразуем:

$$u_1 t^2 + 2u_2 t^3 + ..+ \lambda (k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots) \left(u_0 t + \frac{1}{2} u_1 t^2 + \frac{1}{3} u_2 t^3 + \ldots \right) = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots;$$

$$u_1 t^2 + 2u_2 t^3 + ..+ \lambda \left(k_0 u_0 t + \left(k_1 u_0 + k_0 \cdot \frac{1}{2} u_1 \right) t^2 + \ldots \right) = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 \ldots .$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях t, получаем: $\lambda k_0 u_0 = f_1$,

$$u_1 + \lambda \left(k_1 u_0 + k_0 \cdot \frac{1}{2} u_1 \right) = f_2, \ 2u_2 + \lambda \left(k_2 u_0 + k_1 \cdot \frac{1}{2} u_1 + k_0 \cdot \frac{1}{3} u_2 \right) = f_3,$$

откуда

$$\lambda k_0 u_0 = f_1, \left(1 + \lambda k_0 \cdot \frac{1}{2}\right) u_1 = f_2 - \lambda k_1 u_0, \left(2 + \lambda k_0 \cdot \frac{1}{3}\right) u_2 = f_3 - \lambda \left(k_2 u_0 + k_1 \cdot \frac{1}{2} u_1\right), \qquad (15)$$

Отсюда следует

Теорема 4. Существует такая последовательность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$

что: если λ не принадлежит этой последовательности, то уравнение (8) имеет единственное аналитическое решение, иначе оно либо имеет бесконечное количество аналитических решений, либо не имеет аналитического решения.

Литература

1. *Тагаева С.Б.* Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра 3-го рода в неограниченных областях: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. / С.Б. Тагаева. Бишкек, 2015. 16 с.
2. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. 3-е изд. М., 1979. 320 с.