УДК 517.977.5

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

К.Р. Карабакиров

Исследована задача оптимального управления колебаниями струны в случае, когда колебательный процесс происходит под действием нескольких точечных подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления при минимизации кусочно-линейного функционала. Разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана его сходимость по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

Ключевые слова: точечное управление; нелинейная оптимизация; минимизация функционала.

APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR OPTIMIZATION PROBLEM OF ELASTIC OSCILLATIONS WITH THE MOVABLE POINT CONTROLS

K.R. Karabakirov

It was investigated the problem of optimal control of fluctuations of a string in a case when oscillating process occurs under the influence of several point mobile sources, each of which nonlinearly depends on control function at minimization of piecewise-linear functional. The algorithm of creation the approximate solution of a problem of nonlinear optimization was developed as well as its convergence in control, optimal process and the functional was proved.

Key words: point control; nonlinear optimization; functional minimization.

I. Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Пусть управляемый процесс $V(t, x)$ в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ удовлетворяет краевой задаче [1]

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^{m} \delta\left[x - \mu_k(t)\right] f_k\left[u_k(t)\right], \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{2}$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \qquad 0 < t \le T, \tag{3}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; точки приложений внешних воздействий $f_k\left[u_k(t)\right] \in H(0,\ T)$, каждая из которых нелинейно зависит от функции $u_k(t) \in H(0, T)$, причем

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \ne 0, \quad \forall t \in (0, T) \tag{4}$$

изменяются по заданному закону $0_k = \mu_k(t)$, $0 < \mu_k(t) < 1$; $\psi_1(x) \in H^1(0,1)$, $\psi_2(x) \in H(0,1)$ – заданные функции начального состояния колебательного процесса; $H(X)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве X; постоянная $\alpha > 0$; T – фиксированный момент времени.

Краевая задача (1)–(4) имеет единственное обобщенное решение [2, с. 158–160]

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t sin\lambda_n(t - \tau) \sum_{k=1}^{m} z_n\left[\mu_k(\tau)\right] f_k\left[\tau, u_k(\tau)\right] d\tau \right] z_n(x). \tag{5}$$

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right] = \int_0^1 \left[V(T, x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^{m} \left|u_k(t)\right| dt, \quad \beta > 0, \tag{6}$$

на множестве решений краевой задачи (1)–(4). Здесь $\xi\left(x\right)\in H\left(0,1\right)$ – заданная функция желаемого состояния управляемого процесса в конечный момент времени T.

Данная статья является продолжением работы [2], в которой было установлено, что векторное оптимальное управление, на котором функционал (6) достигает минимального значения, определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений

$$2\beta\left(\frac{\partial f_k\left[t,u_k\left(t\right)\right]}{\partial u_k}\right)^{-1} sign\, u_k(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left[\tau,\,\mu_k(\tau)\right]\int_0^T\sum_{k=1}^{m}G_n\left[\tau,\,\mu_i(\tau)\right]f_i\left[\tau,u_i(\tau)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left[\tau,\,\mu_k(\tau)\right]h_n,$$

$$k=1,2,3,\ldots,m, \tag{7}$$

удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\frac{\partial f_k\left[u_k\right]}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left(\frac{\partial f_k\left[u_k\right]}{\partial u_k}\right)^{-1}\right)>0,\quad k=1,2,3,\ldots,m, \tag{8}$$

где

$$G_n\left[t,\,\mu_k(t)\right]=\frac{1}{\lambda_n}z_n\left[\mu_k(t)\right]sin\lambda_n\left(T-t\right),\; h_n=\xi_n-\psi_{1n}cos\lambda_nT-\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_nT, \tag{9}$$

$\psi_{1n},\psi_{1n},\xi_n$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x),\psi_2(x)$ и $\xi(x)$.

Вопросы разрешимости задачи (7)–(8) могут быть исследованы по методике работы [3]. В наборе $\{u_1(t),...,u_m(t)\}$, функции $u_i(t)$, i = 1, 2, 3, ... m, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем $u_i(t)\geq 0$, (или $u_i(t)\leq 0$), $\forall t\in\left[0;T\right]$. Решение интегрального уравнения Фредгольма обладает свойством непродолжаемости решения [4]. Поэтому решением системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма (7) будет лишь вектор-функция, каждая компонента которой является функцией только одного знака, т. е. либо положительного, либо отрицательного при всех $t\in[0,T]$. Количество всех наборов, где каждая функция определенного знака (либо больше нуля, либо меньше нуля), в промежутке $[0,T]$, равно 2^m.

Для определенности изложение проведем для набора вида

$$\{u_1^+(t),...,u_s^+(t),u_{s+1}^-(t),....,u_m^-(t)\},\quad 1\leq s\leq m\,. \tag{10}$$

В этом случае система (7) приводится к виду

$$\beta\left(\frac{\partial f_i\left[t,u_i(t)\right]}{\partial u_i}\right)^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\sum_{k=1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=1,...,s; \tag{11$_1$}$$

$$-\beta\left(\frac{\partial f_i\left[t,u_i(t)\right]}{\partial u_i}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\sum_{k=1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=s+1,...,m, \tag{11$_2$}$$

а система условий (8) переходит к следующей системе условий

$$\frac{\partial f_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left[\frac{\partial f_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right]^{-1}\right)>0,\quad k=1,...,s, \tag{12$_1$}$$

$$\frac{\partial f_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left[\frac{\partial f_k\left[t,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right]^{-1}\right)<0,\quad k=s+1,...,m. \tag{12$_2$}$$

II. О разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений. Для построения решения этой системы сначала, согласно методике работы [3], введем обозначения

$$\beta\left(\frac{\partial f_i[t,u_i(t)]}{\partial u_i}\right)^{-1}=p_i^+(t),\quad i=1,...,s, \tag{13$_+$}$$

$$-\beta\left(\frac{\partial f_i[t,u_i(t)]}{\partial u_i}\right)^{-1}=p_i^-(t),\quad i=s+1,...,m\,. \tag{13$_-$}$$

Согласно (11_1) из (13_+), функции $u_i(t),\quad i=1,\ldots,s,$ определяются однозначно, т. е. имеют место равенства

$$u_i^+(t)=\varphi_i^+[t,p_i^+(t),\beta],\quad i=1,...,s. \tag{14$_+$}$$

Согласно (11_2) из (13_-), аналогичным образом находим функции

$$u_i^-(t)=\varphi_i^-[t,p_i^-(t),\beta],\quad i=s+1,...,m. \qquad (14_-)$$

В формулах (14_+)–(14_-) функции $\varphi_i^+(\cdot)$ и $\varphi_i^-(\cdot)$ являются известными функциями.

С учетом (13_+)–(14_-) систему нелинейных интегральных уравнений (11_1)–(11_2) можно переписать в следующем виде:

$$p_i^+(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\left(\sum_{k=1}^{s}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,\varphi_k^+(\tau,p_k^+(\tau),\beta)]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=s+1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,\varphi_k^-(\tau,p_k^-(\tau),\beta)]\right)d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=\overline{1,s};$$

$$p_i^-(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\left(\sum_{k=1}^{s}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,\varphi_k^+(\tau,p_k^+(\tau),\beta)]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=s+1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,\varphi_k^-(\tau,p_k^-(\tau),\beta)]\right)d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=\overline{s+1,m}$$

или в операторной форме

$$\overline{p}=G[\overline{p}], \qquad (15)$$

где

$$G[\overline{p}(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left[t,\overline{\mu}(t)\right]\left[h_n-\int_0^T G_n^*(\tau,\overline{\mu}(\tau)\overline{f}[\tau,\overline{\varphi}(\tau,\overline{p}(\tau),\beta)]d\tau\right],$$

$$\overline{p}(t)=\left\{p^+(t),\,p^-(t)\right\}=\left\{p_1^+(t),...,\,p_s^+(t),\,p_{s+1}^-(t),...,p_m^-(t)\right\},$$

$$G[\overline{p}]=\left\{G_1[p_1],...,G_m[p_m]\right\},$$

$$G_n\left[t,\overline{\mu}(t)\right]=\left\{G_n\left[t,\mu^+(t)\right],G_n\left[t,\mu^-(t)\right]\right\}=\left\{G_n\left[t,\mu_1(t)\right],...,G_n\left[t,\mu_s(t)\right],G_n\left[t,\mu_{s+1}(t)\right],...,G_n\left[t,\mu_m(t)\right]\right\},$$

$$\overline{f}\left[t,\overline{\phi}\left(t,\overline{p}(t),\beta\right)\right]=\left\{\overline{f}[t,\phi^+\left(t,p^+(t),\beta\right)],\,\overline{f}[t,\phi^-\left(t,p^-(t),\beta\right)]\right\}=$$

$$=\begin{cases}f_1[t,\phi_1^+[t,p_1^+(t),\beta]],\dots,f_s[t,\phi_s^+[t,p_s^+(t),\beta]],\\ f_{s+1}[t,\phi_{s+1}^-(t,p_{s+1}^-(t),\beta)],\dots,f_m[t,\phi_m^-(t)(t,p_m^-(t),\beta)]\end{cases},$$

* – знак транспонирования.

Можно доказать, что операторное уравнение (15) в пространстве $H^m(0,T)$ имеет единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам [5]

$$\overline{p}^n(t)=G\left[\overline{p}^{n-1}(t)\right],\quad n=1,2,3,\dots, \qquad (16)$$

где $\overline{p}^0(t)=\left(p_1^0(t),...,p_m^0(t)\right)$ – произвольный элемент пространства $H^m(0,T)$.

Точное решение $\overline{p}^0(t)=\lim_{n\to\infty}\overline{p}^n(t)$ и удовлетворяет оценке

$$\left\|\overline{p}^0(t)-\overline{p}^n(t)\right\|_{H^m}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|\overline{G}\left[\overline{p}^0(t)\right]-p^0(t)\right\|_{H^m}, \qquad (17)$$

где

$$\gamma=2Tm\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\beta}\right)f_0\phi_0(\beta)<1.$$

III. “Оптимальное” управление и сходимость его приближений.

Пусть

$$\overline{p}\ (t)=\left\{p_1(t),...,\,p_s(t),\,p_{s+1}(t),...,\,p_m(t)\right\}, \qquad (18)$$

$$\overline{p}^n(t)=\left\{p_1^n(t),...,\,p_s^n(t),\,p_{s+1}^n(t),...,\,p_m^n(t)\right\} \qquad (19)$$

соответственно точное и приближенное решения системы нелинейных интегральных уравнений (15). Подставляя эти решения в (14_+) и (14_-) находим “оптимальное” управление

$$\overline{u}(t)=\left\{u_1^+(t),...,u_s^+(t),u_{s+1}^-(t),...,u_m^-(t)\right\}=\left\{\varphi[t,p_1(t),\beta],...,\varphi[t,p_s(t),\beta],\varphi[t,p_{s+1}(t),\beta],\varphi[t,p_m(t),\beta]\right\}, \qquad (20)$$

и его приближения

$$\overline{u}^n(t) = \overline{\varphi}[t, p^n(t), \beta]. \tag{21}$$

При надлежащем выборе параметра β "оптимальное" управление (20) является решением системы нелинейных интегральных уравнений (11_1)–(11_2) и удовлетворяет дополнительным условиям (12_1)–(12_2).

Учитывая, что функция $\varphi\,(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, имеем:

$$\left\|\overline{u}(t) - \overline{u}^n(t)\right\|_{H^m} = \left\|\varphi\left[t, \overline{p}^0(t), \beta\right] - \varphi\left[t, \overline{p}^n(t), \beta\right]\right\|_{H^m} \leq$$

$$\leq \varphi_0(\beta)\left\|\overline{p}^0(t) - \overline{p}^n(t)\right\|_{H^m} \leq \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|\overline{G}\left(\overline{p}^0(t)\right) - \overline{p}^0(t)\right\|_{H^m} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

из которого следует сходимость приближенного "оптимального" управления.

IV. "Оптимальный" процесс и сходимость его приближений. При подстановке "оптимального" управления (20) в (5) получим "оптимальный" процесс

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{1n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{i=1}^m z_n(\mu_i(\tau) f_i[\tau, u_i(\tau)]d\tau\right)z_n(x), \tag{22}$$

$$V^k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{1n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)] f_i[\tau, u_i^k(\tau)]d\tau\right)z_n(x). \tag{23}$$

Поскольку

$$V(t,x) - V^k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)]\Big(f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]\Big)d\tau z_n(x),$$

то из соотношения

$$\left\|V(t,x) - V^k(t,x)\right\|_H^2 = \int_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)]\Big(f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]\Big)d\tau z_n(x)\right]dt \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \sin^2\lambda_n(t-\tau)d\tau\int_0^T\left(\sum_{i=1}^m z_n[\mu_i(\tau)]\Big(f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]\Big)\right)^2 d\tau dt \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}T2m\int_0^T\sum_{i=1}^m\Big(f_i[\tau, u_i(\tau)] - f_i[\tau, u_i^k(\tau)]\Big)^2 d\tau = \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6}\right)T2m\left\|f[\tau, \overline{u}(\tau)] - f[\tau, u^k(\tau)]\right\|_{H^m}^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6}\right)2mTf_0^2\left\|\overline{u}(\tau) - u^k(\tau)\right\|_{H^m}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

следует сходимость приближенного решения к точному.

V. "Минимальное" значение функционала и сходимость его приближенных значений. Согласно формулам (6), (20)–(22), "минимальное" начение функционала $I\,[u\,(t)]$ и его приближенное значение находим по формулам

$$I[\overline{u}(t)] = \int_0^1\left[\overline{V}(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m\left|\overline{u}_k(t)\right|dt, \tag{24}$$

$$I\left[u^n(t)\right] = \int_0^1\left[V^n(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m\left|u_k^n(t)\right|dt. \tag{25}$$

Непосредственным вычислением имеем

$$\left|I\left[\overline{u}\right] - I\left[u^n\right]\right| = \left|\int_0^1\left\{\left[\overline{V}(T,x) - \xi(x)\right]^2 - \left[V^n(T,x) - \xi(x)\right]^2\right\}dx + 2\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m\Big(\left|\overline{u}_k(t)\right| - \left|u^n(t)\right|\Big)dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^1\left\{\left[\overline{V}(T,x) + V^n(T,x) - 2\xi(x)\right]\left[\overline{V}(T,x) - V^n(T,x)\right]\right\}dx + 2\beta\int_0^T\left(\sum_{k=1}^m\left|\overline{u}_k(t) - u_k^n(t)\right|\right)dt\right| \leq$$

$$\le \left| \left\langle \overline{V}\left(T,x\right)+V^{n}\left(T,x\right)-2\xi(x), \quad \overline{V}\left(T,x\right)-V^{n}\left(T,x\right) \right\rangle_{H} \right| + 2\beta \int_{0}^{T} \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \overline{u}_{k}(t)-u_{k}^{n}(t) \right| \right) dt \,.$$

Отсюда, учитывая, что

1) $\left| \left\langle \overline{V}\left(T,x\right)+V^{n}\left(T,x\right)-2\xi(x), \quad \overline{V}\left(T,x\right)-V^{n}\left(T,x\right) \right\rangle \right| \le \left\| \overline{V}\left(T,x\right)+V^{n}\left(T,x\right)-2\xi(x) \right\| \cdot \left\| \overline{V}\left(T,x\right)-V^{n}\left(T,x\right) \right\|_{H} \le$

$$\le \left(\left\| \overline{V}\left(T,x\right) \right\|_{H} + \left\| V^{n}\left(T,x\right) \right\|_{H} + 2\left\| \xi(x) \right\|_{H} \right) \cdot \left\| \overline{V}\left(T,x\right)-V^{n}\left(T,x\right) \right\|_{H};$$

2) $\int_{0}^{T} \sum_{k=1}^{m} \left| \overline{u}_{k}(t)-u_{k}^{n}(t) \right| dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{0}^{T} \left| \overline{u}_{k}(t)-u_{k}^{n}(t) \right| dt \le \left(\sum_{k=1}^{m} 1^{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\int_{0}^{T} \left| \overline{u}_{k}(t)-u_{k}^{n}(t) \right| dt \right)^{2} \right)^{\frac{1}{2}} \le$

$$\le \sqrt{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_{0}^{T} dt \int_{0}^{T} \left| \overline{u}_{k}(t)-u_{k}^{n}(t) \right|^{2} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{mT} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_{0}^{T} \left| \overline{u}_{k}(t)-u_{k}^{n}(t) \right|^{2} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

имеем неравенство

$$\left| I\left[\overline{u}\right] - I\left[u^{n}\right] \right| \le \left(\left\| \overline{V}\left(T,x\right) \right\|_{H} + \left\| V^{n}\left(T,x\right) \right\|_{H} + 2\left\| \xi\left(x\right) \right\|_{H} \right) \cdot \left\| \overline{V}\left(T,x\right)-V^{n}\left(T,x\right) \right\|_{H} +$$

$$+2\beta\sqrt{mT} \left\| \overline{u}\left(t\right)-u^{n}\left(t\right) \right\|_{H^{m}} \le K_{0} \sqrt{M_{1} m \left(\frac{1}{\lambda_{1}^{2}} + \frac{1}{6} \right)} T f_{0} \phi_{0}(\beta) \frac{\gamma^{n}}{1-\gamma} \left\| G\left[p^{0}(t) \right] - p^{0}(t) \right\|_{H^{m}} +$$

$$+ 2\beta\sqrt{mT} \varphi_{0}(\beta) \frac{\gamma^{n}}{1-\gamma} \left\| G\left[p^{0}(t)\right] - p^{0}(t) \right\|_{H^{m}} = \left(K_{0} \sqrt{M_{1} m \left(\frac{1}{\lambda_{1}^{2}} + \frac{1}{6} \right)} T f_{0} + 2\beta\sqrt{mT} \right) \varphi_{0}(\beta) \frac{\gamma^{n}}{1-\gamma} \left\| G\left[p^{0}(t)\right] - p^{0}(t) \right\|_{H^{m}},$$

где

$$\left\| \overline{V}\left(T,x\right) \right\|_{H} + \left\| V^{n}\left(T,x\right) \right\|_{H} + 2\left\| \xi\left(x\right) \right\|_{H} \le 2\left(\left\| \overline{V}\left(T,x\right) \right\|_{H} + \left\| \xi\left(x\right) \right\|_{H} \right) = K_{0},$$

из которого следует сходимость приближенного значения функционала при $n \to \infty$.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. *Карабакиров К.Р.* Разрешимость задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями при минимизации кусочно-линейного функционала / К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ. 2012. Т. 12. № 10.
3. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков. Бишкек, 2003.
4. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Наука, 1975.
5. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.