УДК 517.97, 62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Б.Ж. Кулбаева

Проведено исследование задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение; приближенное решение; сходимость.

I. Постановка задачи оптимизации и нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать кусочно-линейный функционал [1–4]

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T |u(t)|dt, \quad \beta > 0 \tag{1.1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$0 < x < 1,\ 0 < t \leq T, \tag{1.2}$$

$$v(0, x) = \psi(x),\ 0 < x < 1, \tag{1.3}$$

$$v_x(t, 0) = 0,\ v_x(t, 1) + \mathrm{a}v(t, 1) = 0,\ 0 < t \leq T, \tag{1.4}$$

где $g(t, x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0,1)$, $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ – заданные функции, причем функция $f[t, u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f\left[t,u(t)\right]}{\partial u} \neq 0,\ \forall t \in \left[0,T\right]; \tag{1.5}$$

ядро $K(t, \tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0 = \sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|. \tag{1.6}$$

λ – параметр; постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени; $T(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y, т. е. нужно найти такое управление $u^0(t) \in H(0, T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $v^0(t, x)$ краевой задачи *(1.2)–(1.4)* минимизирует функционал *(1.1)*. Такое управление $u^0(t)$ называется оптимальным, а $v^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

Решение краевой задачи определяется по формуле [3, 5, 6]:

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right] + \right.$$

$$\left. + \int_0^t g_n(\tau) f\left[\tau,u(\tau)\right]\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda\int_\tau^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau\right\} z_n(x), \tag{1.7}$$

где

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\ \ K_{n,i+1}(t,s) = \int_s^t K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau,\ \ K_{n,1}(t,s) \equiv K_n(t,s)$$

резольвента интегрального уравнения

$$\nu_n(t) = \lambda\int_0^t K_n(t,s)\, \nu_n(s)ds + a_n(t),$$

удовлетворяет оценке

$$| R_n(t,s,\lambda)| \le \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2}} \le \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}. \quad (1.8)$$

Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение определенного (положительного или отрицательного) знака нелинейного интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right], \quad (1.9)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right); \quad (1.10)$$

$$G_n(t,\lambda) = g_n(t)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right); \quad (1.11)$$

$$G_n^0(t,\lambda) = g_n(t)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T L_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right), \quad (1.12)$$

причем знак $u^0(t)$ определяется в зависимости выполнения одного из следующих условий, т. е.

$$u(t) > 0, \text{ если } f_u^{-1}\left[t,u\right] f_{uu}\left[t,u\right] > 0, \quad (1.13)$$

$$u(t) < 0, \text{если } f_u^{-1}\left[t,u\right] f_{uu}\left[t,u\right] < 0. \quad (1.14)$$

Это обстоятельство связано с тем, что решение интегрального уравнения Фредгольма не обладает свойством продолжения [6], т. е. решение строится для области(интервала) в целом.

Оптимальное управление имеет структуру [7]

$$u^0(t) = \varphi\ [t, p^0(t), \beta], \quad (1.15)$$

где $p^0(t)$ – единственное решение нелинейного интегрального уравнения

$$p(t) = G\left[p(t)\right] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]. \quad (1.16)$$

Для любого приближенного решения $p_k(t)$ этого уравнения имеет место оценка [8]:

$$\left\|p(t) - p_k(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right] - p_0(t)\right\|_H, \quad (1.17)$$

где $p_0(t)$, $G\,[p_0(t)]$ – известные элементы пространства $H\,(0, T)$, $0 < \gamma < 1$.

Далее, оптимальный процесс $v^0(t, x)$, согласно *(1.7)*, определяется по формуле

$$\nu^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right) + \int_0^T g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right) f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right] z_n(x), \quad (1.18)$$

а минимальное значение функционала *(1.1)* вычисляется по формуле

$$J[u^0] = \int_0^1\left[\nu^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt. \quad (1.19)$$

II. Приближенное решение задачи оптимизации.

Согласно структуре *(1.15)* k-е приближение оптимального управления находим по формуле

$$u_k(t) = \varphi\ [t, p_k(t), \beta],\ k = 1,2,3, \ldots \quad (2.1)$$

Сходимость k-го приближения к оптимальному управлению следует из неравенства

$$\left\|u^0(t) - u_k(t)\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\left\|p^0(t) - p_k(t)\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0\right] - p_0\right\|_H. \quad (2.2)$$

При исследовании сходимости оптимального процесса необходимо учитывать сходимость по резольвенте и по управлению, так как приближения оптимального процесса имеют вид

$$\nu_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right) + \int_0^t g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda\int_\tau^t R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right) f\left[\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right] z_n(x) \quad (2.3)$$

и определяются двумя индексами k, m = 1,2,3, ... Поскольку

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s) \text{ и, } R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$$

то сходимость m-го приближения резольвенты $R\ (t,\ s,\ \lambda)$ при каждом фиксированном n = 1,2,3, ... следует из неравенства

$$R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)\le\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left|K_{n,i}(t,s)\right|\le\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left(\frac{K_0}{\lambda_n^2}\right)^i\frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!}=$$

$$=\frac{K_0}{\lambda_n^2}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_n^2}\right)^{i-1}=\frac{K_0}{\lambda_n^2}\cdot\frac{1}{m!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_n^2}\right)^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_n^2}}\le\frac{K_0}{\lambda_n^2}\cdot\frac{1}{m!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right)^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}, \tag{2.4}$$

которое получено с учетом формулы остаточного члена равномерно сходящегося ряда

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)\le\frac{K_0}{\lambda_n^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}\right]^{i-1}\le\frac{K_0}{\lambda_n^2}e^{\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}}\le\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}.$$

Далее непосредственными вычислениями имеем неравенство

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_H^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\ \lambda\int_0^T\left(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\,e\right)^{-\lambda_n^2 s}ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t g_n(\tau)\left(\lambda\int_\tau^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau-\int_0^t g_n(\tau)\left(\lambda\int_\tau^t R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x)\right\|_H^2\le$$

$$\le\frac{3}{2}\lambda^2T^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left\{\left(\|\psi(x)\|_H^2+\|g(t,x)\|_H^2\left\|f\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right\|_H^2\right)\cdot\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}\cdot\frac{1}{m!}\left[\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right]^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\|g(t,x)\|_H^2\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2\left\|f\left[t,u^0(t)\right]-f\left[t,u_k(t)\right]\right\|_H^2\right\},$$

которое перепишем в виде

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_H\le\left(\frac{3}{2}\lambda^2T^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left\{\left(\|\psi(x)\|_H^2+\|g(t,x)\|_H^2\left\|f\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right\|_H^2\right)\cdot\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}\cdot\frac{1}{m!}\left[\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right]^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\|g(t,x)\|_H^2\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2\left\|f\left[t,u^0(t)\right]-f\left[t,u_k(t)\right]\right\|_H^2\right\}\right)^{1/2}\le\left[\frac{3}{2}\lambda^2T^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left\{\left(\|\psi(x)\|_H^2+\|g(t,x)\|_H^2\left\|f\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right\|_H^2\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}\cdot\frac{1}{m!}\left[\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right]^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2+\|g(t,x)\|_H^2\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2 f_0^2\varphi_0^2(\beta)\left(\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_H\right)^2\right\}\right]^{1/2}.$$

Из этого неравенства следует сходимость приближения оптимального процесса при $m,\ k\to\infty$.

Поскольку минимальное значение функционала и его приближение вычисляется по формулам

$$J[u^0]=\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt,\qquad J_m[u_k(t)]=\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_k(t)\right|dt,$$

то непосредственным вычислением нетрудно получить неравенство

$$\left|J[u^0]-J_m[u_k]\right|\le\left|\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx-\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left\|u^0(t)\right|-\left|u_k(t)\right\|dt\right|\le$$

$$\le\int_0^T\left\|u^0\right|-\left|u_k\right\|dt\le\int_0^T\left|u^0-u_k\right|dt\le\sqrt{T}\left\|u^0-u_k\right\|_H\le\left\|\nu(T,x)+\nu_k^m(T,x)-2\xi(x)\right\|_H\left\|\nu(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_H+2\beta\sqrt{T}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H,$$

из которого следует сходимость приближенного значения функционала при $m,\ k\to\infty$.

Таким образом, приближенное решение задачи нелинейной оптимизации $\left(u_k(t),\nu_k^m(t,x),J_m[u_k(t)]\right)$ сходится к точному решению при $m,\ k\to\infty$.

Литература

1. *Верлань А.Ф.* Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
2. *Тихонов А.Н.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР, сер. мат., 1968. Т.32. №4. С.743–755.
6. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
7. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис… д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.