

ПОТОКИ РИЧЧИ И КВАНТОВАЯ ПЕНА

Д.И. Яр-Мухамедов – аспирант,

В.Дж. Джунушалиев – докт. физ.-мат. наук,

О.Ш. Шаршекеев – докт. физ.-мат. наук, профессор

Разработан метод моделирования квантовой пены посредством применения потоков Риччи к содержащему червоточину решению уравнений гравитации Вейля.

Ключевые слова: квантовая гравитация; пространственно-временная (квантовая) пена; гравитация Вейля; потоки Риччи; червоточины.

Концепция пространственно-временной пены играет важную роль в описании процессов взаимодействия элементарных частиц. Взаимодействие реальных частиц сопровождается появлением виртуальных частиц, которые могут вызывать существенное искривление пространства-времени, то есть создавать флуктуации пространства-времени. Образование квантовой пены также сопровождает ряд процессов, происходящих в квантовом вакууме. Судя по всему, флуктуации пространства-времени могут существенно влиять на величину энергии вакуума. Посредством концепции пространственно-временной пены объясняется эффект Казимира.

В данной работе основной упор делается на получение решения уравнений для потоков

Риччи, одновременно являющегося решением уравнений Вейлевской гравитации, более конкретно, уравнений Баха–Маквелла. Для этого используется основное свойство Вейлевской гравитации – конформная инвариантность. В то же самое время, решение должно быть решением с червоточиной, так как в данной работе мы придерживаемся концепции Уиллера – концепции пространственно-временной пены.

Обзор проблемы. Прежде всего необходимо очертить круг задач. Начать следует с выбора концепции. Как уже было сказано ранее, мы будем придерживаться концепции пространственно-временной пены Джона Уиллера. Далее необходимо выбрать теорию гравитации, которая позволила бы смоделировать

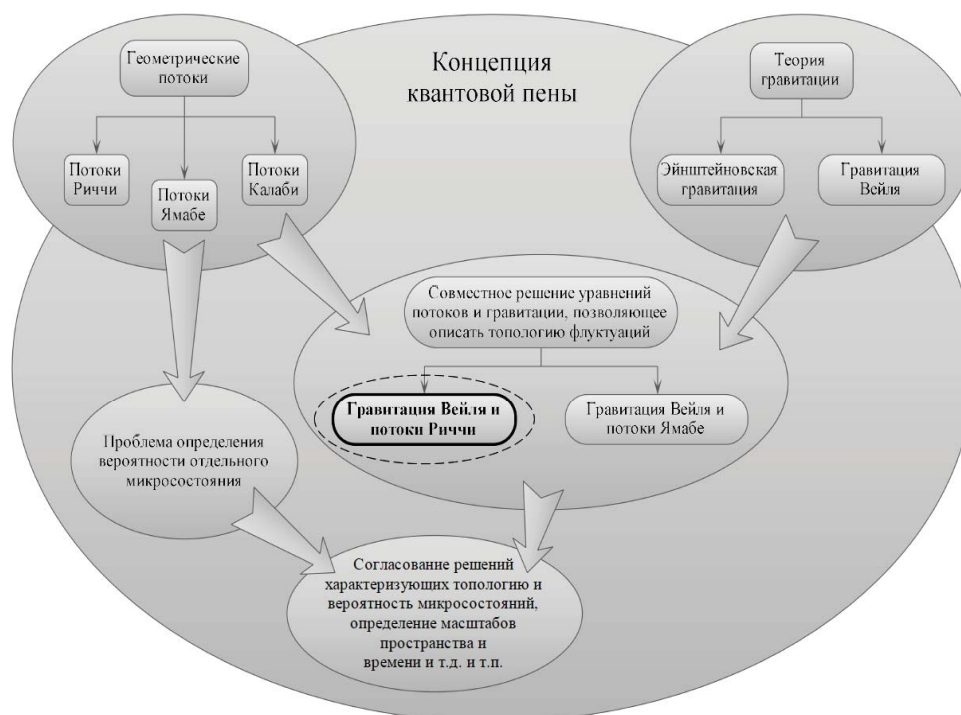


Рис. 1. Круг задач и проблем, касающихся применения потоков Риччи в квантовой гравитации (пунктирный эллипс очерчивает решённую в данной работе задачу).

процессы в рамках данной концепции. Мы остановили свой выбор на Вейлевской теории гравитации. Далее необходимо исследовать эволюцию полученного решения, для чего мы применим потоки Риччи. В наиболее общем случае возможно использование другой теории гравитации или других геометрических потоков (рис. 1).

Поток Риччи – процесс деформации метрики Римановского пространства, являющийся аналогом уравнений теплопроводности. Он представляет собой диффузионный процесс, действующий на метрику таким образом, что устраняет всякую ее неравномерность, аналогично тому, как при диффузии тепла устраняются перепады температур. Потоки Риччи были введены Ричардом Гамильтоном в 1981 г. [1]. Они играют существенную роль в доказательстве гипотезы Пуанкаре [2].

В данной работе потоки Риччи применяются совместно с уравнениями Вейля. Герман Вейль в 1918 г. предложил новый тип геометрии пространства времени и основывающуюся на ней объединённую теорию гравитации и электромагнетизма [3].

Уравнения Вейлевской гравитации вместе с потоками Риччи могут быть применены для мо-

делирования пространственно-временной пены, также называемой квантовой пеной, концепция которой применительно к квантовой гравитации была предложена в 1955 г. Джоном Уиллером [4]. В рамках этой концепции постулируется, что пространственно-временная пена представляет собой множество квантовых червоточин Планковских размеров. Эти квантовые флуктуации в макромасштабах сглаживаются и явно не выявляют своего присутствия, в результате чего мы наблюдаем гладкое пространство, метрика которого является решением уравнений Эйнштейна.

Постановка задачи. Проведём исследование характера эволюции пространственной части пространственно-временного континуума на масштабах порядка планковской длины:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616252(81) \times 10^{-35} \text{ м.} \quad (1)$$

Исследования будем проводить в рамках концепции пространственно-временной пены Джона Уиллера. В соответствии с выбранной концепцией потребуем, чтобы искомое решение представляло собой червоточину, а точнее эволюцию червоточки по мере её сжатия и перехода в плоское пространство.

Решение данной задачи будем проводить в рамках Вейлевской гравитации, допускающей локальное перемасштабирование метрики. Для исследования процесса эволюции метрики воспользуемся геометрическими потоками, эквивалентными нелинейным уравнениям теплопроводности – потоками Риччи. Используем свойство конформной эквивалентности решений Вейлевской гравитации для нахождения совместного решения гравитационных уравнений и уравнений для потоков Риччи.

Пусть будет задана некоторая функция $e^{2\alpha(r,\tau)}$ радиальной координаты r и параметра τ , определяющая масштаб метрики в данной точке. Все компоненты метрического тензора, соответствующего определённому решению Вейлевской гравитации, в результате умножения на эту функцию образуют новый метрический тензор, описывающий другое пространство-время, также являющееся решением гравитации Вейля. Подставим получившуюся метрику в уравнения для потоков Риччи. В качестве искомой функции выберем функцию $\alpha(r,\tau)$. Центральной задачей в данной работе является поиск решения для этой функции. Сначала необходимо найти все имеющие смысл статические решения, затем осуществить поиск решений, эволюционирующих с изменением параметра τ .

Параметр τ не представляет собой какую-либо пространственную или временную координату. В рамках предлагаемой концепции он является некоторой величиной, характеризующей определённое микросостояние статистического ансамбля. Поиск функции, описывающей вероятность реализации определённого микросостояния, является очень актуальной задачей, решение которой, судя по всему, может быть осуществлено независимо от решения задач исследования топологии пространства-времени. Эта задача не входит в ряд задач, решаемых в данной работе.

Аналитическое решение. Воспользуемся решением уравнений Баха–Максвелла [5, 6] для статического сферически симметричного случая:

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{a_0} + br + c + \frac{d}{r} \right) dt^2 - \left(\frac{r^2}{a_0} + br + c + \frac{d}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2)$$

Упростим данное решение, положив $b = c = d = 0$ и перейдя к безразмерным координатам посредством преобразований $\sqrt{a_0}/r \rightarrow r$ и $t/a_0 \rightarrow t$. В результате получим метрику:

$$ds^2 = \frac{a_0}{r^2} (dt^2 - dr^2 - d\Omega^2). \quad (3)$$

Произведём над данной метрикой конформное преобразование и получим:

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,\tau)} (dt^2 - dr^2 - d\Omega^2). \quad (4)$$

Полученная метрика конформно эквивалентна (3) и так же как (2) является решением уравнений Баха–Максвелла. Рассмотрим пространственную часть выбранной метрики:

$$dl^2 = e^{2\alpha(r,\tau)} (dr^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5)$$

Подставляя компоненты метрического тензора для пространственной части выбранной метрики в уравнения потоков Риччи [1], получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{2\alpha(r,\tau)} \dot{\alpha}(r,\tau) = 2\alpha''(r,\tau) \\ 1 + e^{2\alpha(r,\tau)} \dot{\alpha}(r,\tau) = \alpha'(r,\tau)^2 + \alpha''(r,\tau) \end{cases} \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha'(r,\tau) = \frac{\partial \alpha}{\partial r}; \quad \alpha''(r,\tau) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}; \quad \dot{\alpha}(r,\tau) = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}.$$

Одним из решений этой системы является:

$$\alpha(r,\tau) = r. \quad (7)$$

Найденное решение не содержит в себе параметра τ и зависит только от радиальной координаты, то есть оно является стационарным. Метрика для данного решения примет вид:

$$dl^2 = e^{2r} (dr^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8)$$

Для того чтобы разобраться в физическом смысле полученного решения удобно перейти к новым координатам:

$$R = e^r; \quad dR = e^r dr. \quad (9)$$

В новых координатах метрика примет следующий вид:

$$dl^2 = dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (10)$$

Очевидно, что получившаяся в результате замены координат метрика соответствует плоскому пространству, тем не менее, следует отметить, что время всё же остаётся искривлённым, то есть пространство-время не является плоским:

$$ds^2 = R^2 dt^2 - dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (11)$$

Численное решение. Теперь рассмотрим процессы образования и схлопывания червоточины, т.е. исследуем характер изменения топологии пространства при переходе от пространства с червоточинной к плоскому пространству. Воспользуемся численными методами для получения зависимости кривизны пространства от параметра τ . Рассмотрим график, отражающий начальные условия для функции α (см. рис. 2).

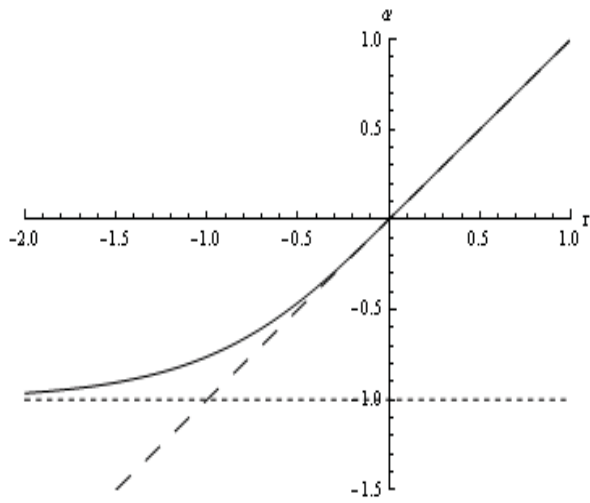


Рис. 2. Начальные условия для функции α (сплошная линия); функция α , описывающая плоское пространство (длинный пунктир); прямая, к которой асимптотически приближается функция, описывающая начальные условия при стремлении радиальной координаты к $-\infty$ (короткий пунктир).

Слева от начала координат начальное условие соответствует червоточине, справа – плоскому пространству. Если продолжить кривую в сторону отрицательных значений радиальной координаты, то она будет асимптотически приближаться к -1 . В положительном направлении функция α линейно зависит от радиальной координаты:

$$\alpha(r,0) = \begin{cases} r \geq 0, & r \\ r < 0, & \tanh r \end{cases} \quad (12)$$

Граничные условия зададим из тех соображений, что функция α для любого значения параметра τ должна описывать плоское пространство при значениях радиальной координаты равных или больших нулю:

$$\begin{aligned} \alpha(0, \tau) &= 0, \\ \alpha'(0, \tau) &= 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Результаты численных расчётов представлены на рис. 3. Как можно видеть, прежде чем пространство с червоточинной переходит в плоское пространство, функция α осциллирует с ростом параметра τ . На рис. 3 изображена первая осцилляция. С ростом параметра амплитуда осцилляций уменьшается, и они захватывают всё меньшую область пространства. Осциллирующая область функции ограничена и при стремлении параметра τ к $+\infty$ уменьшается в направлении

$-\infty$. При безграничном увеличении параметра τ пространство переходит в плоское.

Для удобства проведения анализа воспользуемся преобразованием координат (9), использованным ранее. Построим кривые, отражающие зависимости метрического тензора от радиальной координаты при различных значениях параметра τ .

Исследуем осцилляционный процесс схлопывания червоточины. На рис. 4 начальное состояние компоненты метрического тензора изображено пунктирной линией с длинными черточками. На графике видно, что в начале координат присутствует проход радиуса e^{-1} . По мере увеличения значения параметра τ проход стягивается, затягивая в себя часть близлежащего пространства. Это состояние отражено на графике пунктирной линией с короткими штрихами. Далее вновь происходит расширение горлышка червоточины, теперь уже меньшей глубины. Затем снова происходит её сжатие.

Судя по всему, этот процесс повторяется много раз. Каждый следующий повтор процесса осуществляется при меньшей ширине и глубине червоточины. По результатам расчётов был сделан вывод о том, что уже четвёртая осцилляция имеет характеристики на порядок меньшие, чем характеристики первой. В пределе, при бесконечно возрастающем параметре τ червоточина исчезает полностью, а пространство становится плоским. На графике плоскому пространству соответствует сплошная кривая линия.

Теперь рассмотрим отдельную осцилляцию более детально. На рис. 5 отражён процесс сжатия червоточины. Сначала этот процесс протекает очень быстро, но по мере роста величины параметра τ скорость его падает и в конечном счёте при определённой величине τ процесс обращается.

После обращения процесса пространство стремится к плоскому. Скорость изменения кривизны достаточно велика для того, чтобы вновь сформировать червоточину, хотя теперь уже меньшего радиуса. Процесс переходит к следующей осцилляции, которая уже затрагивает меньшую область пространства. По мере увеличения параметра τ пространство постепенно превращается в плоское.

Качественный анализ решения и физический смысл параметра τ . Весь процесс осцилляционного преобразования искривлённого присутствием червоточины пространства в плоское Евклидово пространство с изменением параметра τ , представлен на рис. 6. В данной работе принимается следующая интерпретация

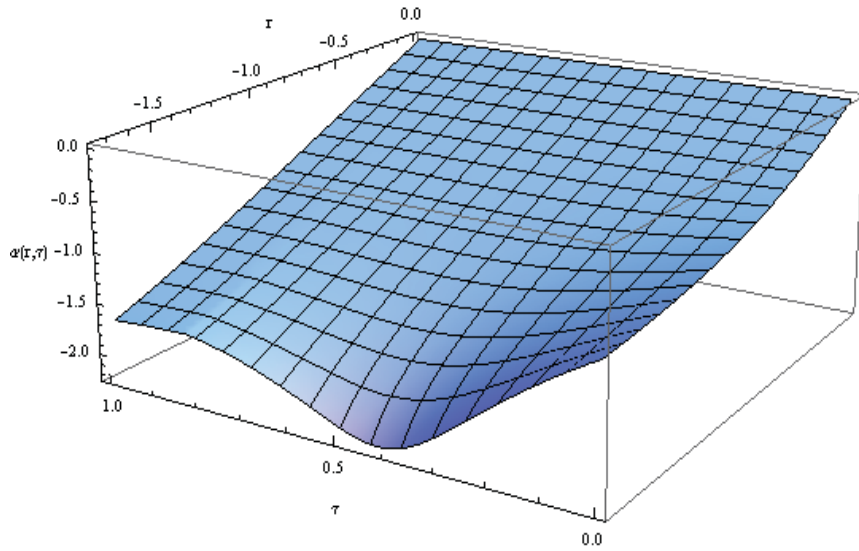


Рис. 3. Зависимость α от радиальной координаты и параметра τ .

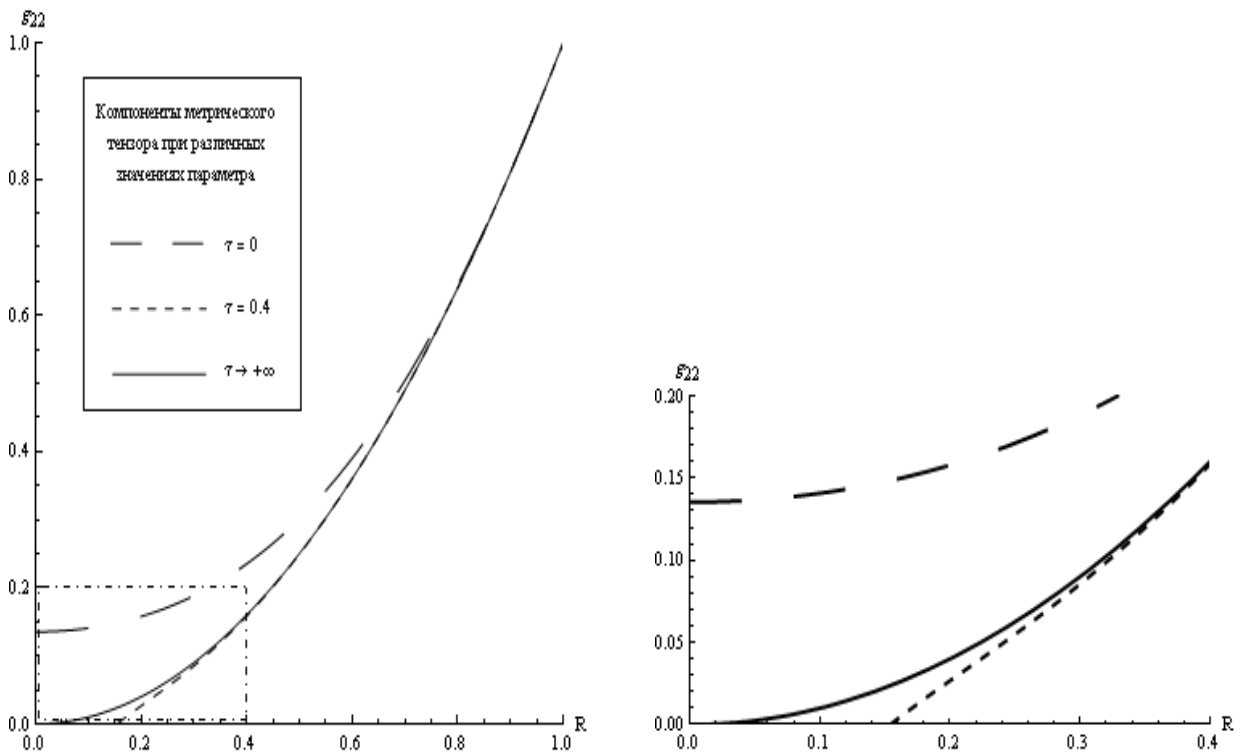


Рис. 4. Зависимость компонент метрического тензора от радиальной координаты при различных значениях параметра τ (область, помеченная штрих-пунктиром на левом графике, изображена в увеличенном виде на правом).

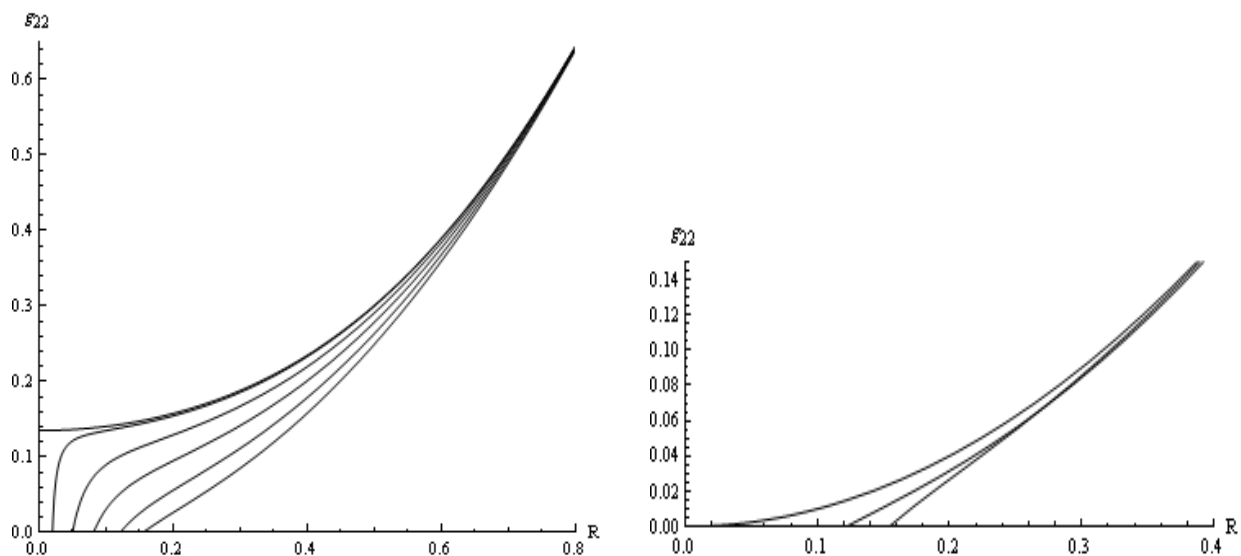


Рис. 5. Изменение компонент метрического тензора с параметром τ (на левом графике: 0, 0.004, 0.04, 0.1, 0.2, 0.4 – от верхней кривой к нижней; на правом графике: 0.4, 0.6, $+\infty$ – от нижней кривой к верхней).

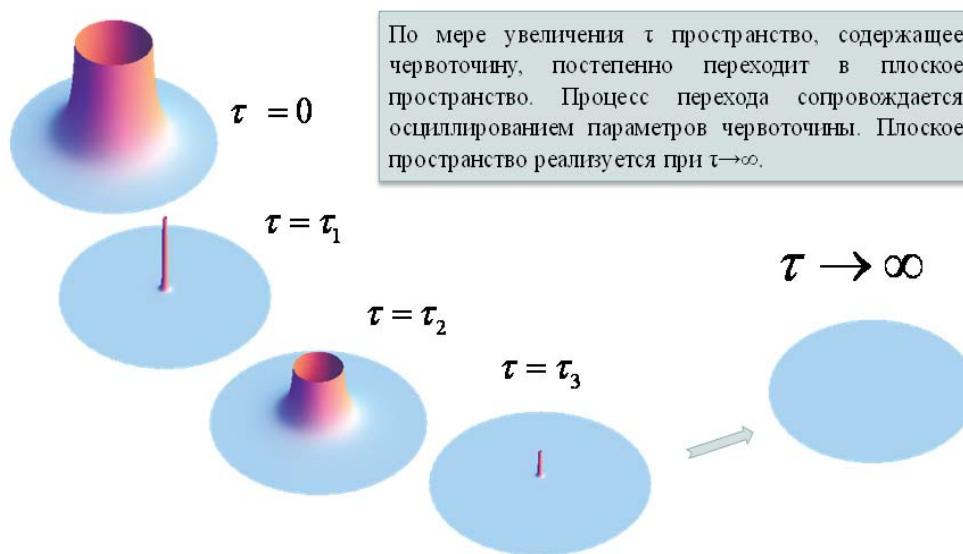


Рис. 6. Сжатие червоточины с ростом τ .

параметра τ . Параметр τ представляет собой величину, характеризующую определённое микросостояние. Червоточины, соответствующие различным τ , спонтанно образуются и исчезают. Пространство-время искривляется и сначала образуются вмятины. Затем эти неоднородности растут и соединяются между собой парами, образуя нечто наподобие ручки. Ручка существует в течение небольшого промежутка времени, допустимого соотношением неопределённостей, а затем разделяется и пространство становится вновь плоским. Процесс этот может происходить плавно или скачкообразно, то есть состояние, соответствующее определённому τ , возникает не путём постепенного плавного изменения параметра, а спонтанно.

Выводы. Разработан метод моделирования пространственно-временной пены путем

совместного применения теории гравитации и геометрических потоков. Получено решение для односторонней червоточины в гравитации Вейля и проведён анализ её эволюции посредством применения потоков Риччи.

Литература

1. *Hamilton R.*, *Diff. J. Geom.* – 1982. – V. 17. – P. 255.
2. *Perelman G.* Preprint [arxiv:math.DG/0211159]; preprint [arxiv:math.DG/0303109].
3. *Weyl H.* *Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wiss. Teil.* – 1918. – V. 1. – P. 465–480.
4. *Wheeler J.A.* In *Relativity, Groups and Topology*; DeWitt, B.S.; DeWitt, C.M., Ed.; Gordon & Breach. – New York, 1963. – P. 315.
5. *Bach R.* *Math. Zeitschr.* – 1921. – V. 9. – P. 110–135.
6. *Riegert R.J.* *Phys. Rev. Lett.* – 1984. – V. 53. – P. 315.