УДК 512.15 (575.2) (04)

ОБЩИЙ ВИД ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА $C_b(X)$

Г.Ф. Джаббаров

Исследуется пространство полуаддитивных функционалов и получен общий вид полуаддитивных функционалов на $C_b(X)$.

Ключевые слова: линейный функционал; полуаддитивный функционал; пространство полуаддитивных функционалов.

Пусть X – тихоновское пространство. Через $C_b(X)$ обозначим пространство всех ограниченных непрерывных функций $f: X \to R$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in R$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\phi, \psi \in C_b(X)$. Неравенство $\phi \le \psi$ означает, что $\phi(x) \le \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Следуя работам [1], [2] введем следующее

Определение 1. Функционал $\nu : C_b(X) \to R$ называется:

1) слабо аддитивным, если для всех $c \in R$ и $\varphi \in C_b(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$;

2) сохраняющим порядок, если для функций $\varphi, \psi \in C_b(X)$ из $\phi \le \psi$ вытекает $\nu(\phi) \le \nu(\psi)$;

3) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;

4) положительно-однородным, если $\nu(\lambda \phi) = \lambda \nu(\phi)$ для всех $\varphi \in C_b(X)$, $\lambda \in R_+$, где $R_+ = [0, +\infty)$;

5) полуаддитивным, если $\nu(f+g) \le \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C_b(X)$.

Для компакта X через $O \circ \beta(X)$ обозначается [2] множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Элементы множества $O \circ \beta(X)$, для краткости, называют слабо аддитивными функционалами. Через $OH \circ \beta(X)$ обозначим множество всех положительно-однородных функционалов из $O\circ\beta(X)$, а через $OS\circ\beta(X)$ – всех полуаддитивных функционалов из $OH\circ\beta(X)$. Эти множества снабжаются топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\mu\in O\circ\beta(X)$ образуют множества вида

$$\langle\mu;\varphi_1,...,\varphi_k;\varepsilon\rangle=\left\{\nu\in O\circ\beta(X):\left|\mu(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)\right|<\varepsilon,\, i=1,...,k\right\}.$$

В пространствах $OH\circ\beta(X)$ и $OS\circ\beta(X)$ рассматривается индуцированная топология из $O\circ\beta(X)$.

Далее мы получим общий вид слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных и полуаддитивных функционалов на $C_b(X)$.

Легко доказывается следующее

Предложение 1. Для любого тихоновского пространства X пространства $OH\circ\beta(X)$ и $OS\circ\beta(X)$ являются выпуклыми компактами.

Пусть A – непустое подмножество пространства $P\circ\beta(X)$ положительных, нормированных линейных функционалов на $C_b(X)$ и $f\in C_b(X)$. Тогда $|\mu(f)|\le\|f\|$ для любого $\mu\in A$, и поэтому множество $\{\mu(f):\mu\in A\}$ ограничено сверху. Следовательно, для любого $f\in C_b(X)$ существует число

$$\nu_A(f)=\sup\{\mu(f):\mu\in A\}. \qquad (1)$$

Предложение 2. Пусть A – непустое подмножество пространства $P\circ\beta(X)$. Тогда

а) функционал $\nu_A:C_b(X)\to R$ принадлежит $OS\circ\beta(X)$;

б) $\nu_A=\nu_{co(A)}$, где $co(A)$ – выпуклая оболочка A;

в) $\nu_A=\nu_{cl(A)}$, где $cl(A)$ – замыкание A;

г) $\nu_A=\nu_{cl(co(A))}$.

Доказательство. а) 1. Пусть $f\in C_b(X)$ и $c\in R$. Имеем

$$\nu_A(f+c_X)=\sup\{\mu(f+c_X):\mu\in A\}=\sup\{\mu(f)+c:\mu\in A)=$$
$$=\sup\{\mu(f):\mu\in A\}+c=\nu_A(f)+c.$$

2. Возьмем $f,g\in C_b(X)$ такие, что $f\le g$. Тогда

$$\nu_A(f)=\sup\{\mu(f):\mu\in A\}\le\sup\{\mu(g):\mu\in A\}=\nu_A(g).$$

3. $\nu_A(1_X)=\sup\{\mu(1_X):\mu\in A\}=\sup\{1:\mu\in A\}=1.$

4. Пусть $f\in C_b(X)$ и $t\in R_+$. Тогда

$$\nu_A(tf)=\sup\{\mu(tf):\mu\in A\}=\sup\{t\mu(f):\mu\in A\}=t\sup\{\mu(f):\mu\in A\}=t\nu_A(f)$$

5. Пусть $f,g\in C_b(X)$. Тогда

$$\nu_A(f+g)=\sup\{\mu(f+g):\mu\in A\}=\sup\{\mu(f)+\mu(g):\mu\in A\}\le$$
$$\le\sup\{\mu(f):\mu\in A\}+\sup\{\mu(g):\mu\in A\}=\nu_A(f)+\nu_A(g).$$

Таким образом, $\nu_A\in OS\circ\beta(X)$.

б) Поскольку $A\subset co(A)$, то $\nu_A(f)\le\nu_{co(A)}(f)$ для любого $f\in C_b(X)$. Покажем, что $\nu_A(f)\ge\nu_{co(A)}(f)$ для любого $f\in C_b(X)$.

Пусть $f\in C_b(X)$ и $\varepsilon>0$. Тогда существует $\mu_\varepsilon\in co(A)$ такое, что $\mu_\varepsilon(f)\ge\mu_{co(A)}(f)-\varepsilon$. Так как $\mu_\varepsilon\in co(A)$, то μ_ε имеет вид $\sum_{i=1}^{n}t_k\mu_k$, где $\mu_k\in A$, $t_k\ge 0$, $k=\overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^{n}t_k=1$. Поскольку $\mu_k(f)\le\mu_A(f)$, то

$$\mu_{co(A)}(f)-\varepsilon \le \mu_\varepsilon(f)=\sum_{k=1}^{n} t_k\mu_k \le \sum_{k=1}^{n} t_k\nu_A(f)=\nu_A(f) \quad ,$$

т.е. $\nu_{co(A)}(f)-\varepsilon \le \nu_A(f)$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ получим, что $\nu_{co(A)}(f) \le \nu_A(f)$, т.е. $\nu_A(f)=\nu_{co(A)}(f)$.

в) Так как $A \subset cl(A)$, то $\nu_A(f) \le \nu_{cl(A)}(f)$ для любого $f \in C_b(X)$. Покажем, что $\nu_A(f) \ge \nu_{cl(A)}(f)$ для любого $f \in C_b(X)$.

Возьмём $f \in C_b(X)$ и $\varepsilon>0$. Тогда существует $\mu_\varepsilon \in cl(A)$ такое, что $\mu_\varepsilon(f) \ge \nu_{cl(A)}(f)-\varepsilon$. Так как $\mu_\varepsilon \in cl(A)$, то существует $\mu_0 \in A$ такое, что $|\mu_\varepsilon(f)-\mu_0(f)|<\varepsilon$. Следовательно,

$$\nu_{cl(A)}(f)-\varepsilon \le \mu_\varepsilon(f) < \mu_0(f)+\varepsilon \le \nu_A(f)+\varepsilon,$$

т.е. $\nu_{cl(A)}(f)-2\varepsilon < \nu_A(f)$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ имеем, что $\nu_{cl(A)}(f) \le \nu_A(f)$, т.е. $\nu_A(f)=\nu_{cl(A)}(f)$.

г) Непосредственно следует из б) и в). Предложение 2 доказано.

Следующий результат показывает, что формула (1) дает общий вид функционалов из $OS \circ \beta(X)$.

Теорема 1. Для всякого $\nu \in OS \circ \beta(X)$ существует непустой выпуклый компакт A в $P \circ \beta(X)$ такой, что $\nu=\nu_A$, где ν_A функционал вида (1), при этом для каждого $f \in C_b(X)$ существует $\mu \in A$ такое, что $\nu(f)=\mu(f)$.

Следующий результат показывает, что соответствие $A \leftrightarrow \nu_A$, где A – непустой выпуклый компакт в $P \circ \beta(X)$ задает взаимно однозначное отображение между множеством $OS \circ \beta(X)$ и выпуклыми компактными подмножествами $P \circ \beta(X)$.

Теорема 2. Если A и B – непустые выпуклые компакты в $P \circ \beta(X)$, то $\nu_A=\nu_B$ тогда и только тогда, когда $A=B$.

Литература

1. *Davletov D. E., Djabbarov G. F.* Functor of semiadditive functionals //Methods of Functional Analysis and Topology. – 2008. – V. 14. – №4. – P. 314–322.
2. *Zaitov A. A.* On categorical properties of order-preserving functionals //Methods of Functional Analysis and Topology. – 2003. – V. 9. – №4. – P. 357–364.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.