УДК 517.956 (575.2) (04)

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И.К. Карасаев

Приведен пример построения характеристическгое уравнения.

Ключевые слова: уравнение Хилла; матрица; характеристическое уравнение.

Над построением спектра показателей трудились математики, такие как А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Х. Кох, Г.В. Бондаренко, В.В. Болотин, А.П. Проскуряков, В.Ф. Журавев, К.Г. Валеев, В.А. Тафт, Н.Е. Когин и др., которым не удалось построить спектр показателей Ляпунова для уравнения Хилла. В данной статье строится характеристическое уравнение, позволяющее построить спектр показателей Ляпунова, по которому можно точно вычислить показатели Ляпунова.

Характеристическая функция $\Delta_1(\mu)$, определяется определителем [1]

$$\begin{vmatrix} \ldots 1+\frac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \ldots \end{vmatrix},$$

произвольный элемент которого есть

$$\left[\Delta_1(\mu)\right]_{pq} = \left(1+\frac{\alpha}{(\mu+ip)^2-\alpha}\right)\delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{(\mu+ip)^2-\alpha}.$$

$$\begin{vmatrix} \ldots 1+\frac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{-1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{0+2}}{(\mu+0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu+0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu+0i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \ldots \\ \ldots \frac{a_{2+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \ldots \end{vmatrix}$$

Произвольный элемент

$$\left[\Delta_1(-\mu)\right]_{pq}=\prod_{p=-N}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{(\mu-ip)^2-\alpha}\right)\delta_{pq}+\sum_{\omega_N}\prod_{p,q=-N}^{N}\frac{a_{p-q}}{(\mu-ip)^2-\alpha}.$$

Так как p и q принимают целые значения и меняется от $-\infty$ до $+\infty$, то отсюда следует, что $\Delta_1(-\mu)=\Delta_1(\mu)$.

Теорема 1. Характеристическую функцию можно представить в виде

$$\Delta_1(\mu)=\frac{P(z)+i\left[r_1P_1(z)+r_2P_2(z)\right]}{P(z)}, \tag{1}$$

где

$$P(z)=(z-\beta_1)(z-\beta_2), \tag{2}$$

$$P_1(z)=(z+\beta_1)(z-\beta_2),\ P_2(z)=(z-\beta_1)(z+\beta_2),$$

$$z=e^{2\pi\mu},\quad \beta_1=e^{2\pi\varepsilon_1},\quad \beta_2=e^{2\pi\alpha_2};\quad \alpha_k=\sqrt{\alpha}\,(k=1.2).$$

Так как

$$ctg\pi i(\alpha_k-\mu)=\frac{z+\beta_k}{z-\beta_k}(k=1.2), \tag{3}$$

то подставляя (3) в

$$\Delta(\mu)=\frac{P(z)\Delta_1(\mu)}{P(1)e^{2\pi\mu}}, \tag{4}$$

получим (1).

Из (1) и (4) имеем, что

$$\Delta(\mu)=\frac{1}{P(1)e^{2\pi\mu}}\left[P(z)+i\left(r_1P_1(z)+r_2P_2(z)\right)\right], \tag{5}$$

где

$$P(1)=(1-\beta_1)(1-\beta_2),\quad P(z),P_1(z),P_2(z)$$

определяются равенствами (2).

Следствие 1. Имеет место равенство

$$r_2=-r_1. \tag{6}$$

В самом деле [1],

$$\Delta_1(\mu)=1+r_1ctg\pi i(\alpha_1-\mu)+r_2ctg\pi i(\alpha_2-\mu),$$

$$\Delta_1(-\mu)=1+r_1ctg\pi i(\alpha_1+\mu)+r_2ctg\pi(\alpha_2+\mu).$$

Учитывая, что

$$\Delta_1(-\mu)=\Delta_1(\mu),\quad \alpha_2=\alpha_{1,}\sqrt{\alpha=\alpha_k}(k=1,2)$$

имеем $r_1ctg\,\pi i(\alpha_1-\mu)+r_1ctg\,\pi i(\alpha_2-\mu)=r_1ctg\,\pi i(\alpha_1+\mu)+r_2ctg\pi i(\alpha_2+\mu)$,

$$(r_1+r_2)\left[ctgi(\alpha_1-\mu)+ctg\pi i(\alpha_2+\mu)\right]=0.$$

Покажем, что

$$ctg\pi i(\alpha_1-\mu)+ctg\pi i(\alpha_2-\mu)\neq 0,\ \mu\in G.$$

Отсюда

$$ctg\pi i(\alpha_1-\mu)+ctg\pi i(\alpha_2-\mu)=\frac{\sin(2\pi i\mu)}{\sin\pi i(\alpha_1-\mu)\sin\pi i(\alpha_1+\mu)}.$$

В силу условия поляризации

$$\sin\pi i(\alpha_1-\mu)\neq 0,\ \sin\pi i(\alpha_1+\mu)\neq 0.$$

что противоречит условию поляризации, т.к. мы в этом случае имели бы

$\left(\mu+ip\right)^2-\alpha\neq 0\ \left(p=0,\pm1,\pm2,...\right)$,

что для носителя α поляризации этого быть не может.

Допустим, что

$sin(2\pi i\mu)=0$.

Это значит, что

$\mu=ip$ или $\mu=p+\frac{p}{2},\ p\in Z.$

Этого быть не может.

Таким образом, остается принять (6).

Следствие 2. Имеет место соотношение

$$r_1=\frac{1}{2}\left[\Delta\left(0\right)-1\right]tg\pi i\alpha_1. \qquad (7)$$

В самом деле, из (5) получаем, что

$$\Delta\left(0\right)=\frac{1}{P(1)}\left[P\left(1\right)+i\left(r_1P_1\left(1\right)+r_2P_2\left(1\right)\right)\right]$$

$$P(1)=\left(1-\beta_1\right)\left(1-\beta_2\right),\quad z=e^{2\pi o}=1.$$

$$P_1\left(1\right)=\left(1+\beta_1\right)\left(1-\beta_2\right),$$

$$P_2\left(1\right)=\left(1-\beta_1\right)\left(1+\beta_2\right).$$

Учитывая (5), имеем

$$\Delta\left(0\right)=\frac{1}{P\left(1\right)}\left[P\left(1\right)+ir_1\left(P_1\left(1\right)-P_2\left(1\right)\right)\right]$$

$$\Delta\left(0\right)-1=r_1ctg\pi i\alpha_1,$$

$$r_1=\frac{1}{2}\left[\Delta\left(0\right)-1\right]tg\pi i\alpha.$$

Теорема 2. Нули аналитических функций $\Delta_1\left(\mu\right)$ и $\Delta\left(\mu\right)$ совпадают.

В самом деле, в силу (4) , имеем, что

$$\Delta\left(\mu\right)=\frac{P(z)\Delta_1\left(\mu\right)}{P\left(1\right)e^{2\pi\mu}}.$$

Нули *P(z)* есть простые, изолированные полюсы $\Delta_1\left(\mu\right)$, т.е. нули P(z) есть полюсы $\Delta_1\left(\mu\right)$, и наоборот, полюсы $\Delta_1\left(\mu\right)$ есть нули *P(z),* т.е. они гасят друг друга.

Таким образом, только нули $\Delta_1\left(\mu\right)$ будут нулями $\Delta\left(\mu\right)$, и наоборот, нули $\Delta\left(\mu\right)$ будут нулями $\Delta_1\left(\mu\right)$. Как известно, уравнение, определяющее характеристические показатели есть [1]:

$$\Delta_1\left(\mu\right)=0,$$

где $\Delta_1\left(\mu\right)$ − нормальный определитель.

Поэтому решение этого уравнения можно свести к решению уравнения

$$\Delta\left(\mu\right)=0\,, \qquad (8)$$

а на основании (1), решение (8) сводится к решению уравнения

$$P\left(z\right)+i\left(r_1P_1\left(z\right)+r_2P_2\left(z\right)\right)=0\,. \qquad (9)$$

Это есть характеристическое уравнение для уравнения Хилла.

Далее, упростим уравнение (9). Учитывая (6), получим, что

$$P\left(z\right)+r_1i\left(P_1\left(z\right)-P_2\left(z\right)\right)=0,$$

где $P_1(z), P_2(z)$ и $P(z)$ определяются равенствами в (2).

Развертывая левую часть данного уравнения, имеем

$$z^2-(\beta_1+\beta_2)z+z\cdot z^{-1}+ir_1\left(z^2+(\beta_1-\beta_2)z-1-z^2+(\beta_1-\beta_2)z+1\right)=0,$$

где

$$z=e^{2\pi\mu},\ \beta_1=e^{2\pi\alpha_1},\ \beta_2=e^{2\pi\alpha_2},\ \alpha_2=-\alpha_1,\ \alpha_k=\sqrt{\alpha}\,(k=1.2).$$

$$2\frac{z+z^{-1}}{2}-2\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+4ir_1\frac{(\beta_1-\beta_2)}{2}=0.$$

Так как

$$ch(2\pi\mu)=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \ sh(2\pi\alpha_1)=\frac{\beta_1-\beta_2}{2}.,$$

то

$$ch(2\pi\mu)-ch(2\pi\alpha_1)+2r_1 sh(2\pi\alpha_1)=0,$$

или

$$\cos(2\pi i\mu)-\cos(2\pi i\alpha_1)+2r_1\sin(2\pi i\alpha_1)=0.$$

Учитывая (7), имеем:

$$-\sin^2(\pi i\mu)+\sin^2(\pi i\alpha_1)+\left[\Delta(0)-1\right]\sin^2(\pi i\alpha_1)=0.$$

или

$$\sin^2\pi i\mu=\Delta(0)\sin^2\pi i\alpha_1 \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{(\mu-Ni)^2}{(\mu-Ni)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{-N+1}}{(\mu-Ni)^2-\alpha} & \frac{a_{-N-0}}{(\mu-Ni)^2-\alpha} & \frac{a_{-N-1}}{(\mu-Ni)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{-N-N}}{(\mu-Ni)^2-\alpha} \\
\cdots & . & . & . & . & . & . \\
\frac{a_{-1+N}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{(\mu-i)^2}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{-1-N}}{(\mu-i)^2-\alpha} \\
\frac{a_{0+N}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{(\mu-0i)^2}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{0-N}}{(\mu-0i)^2-\alpha} \\
\frac{a_{1+N}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{(\mu+i)^2}{(\mu+i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{1-N}}{(\mu+i)^2-\alpha} \\
. & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\
\frac{a_{N+N}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{a_{N+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{N-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{N-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \cdots & \frac{(\mu+iN)^2}{(\mu+Ni)^2-\alpha}
\end{vmatrix},$$

$\Delta(0)$ – есть значение определителя матрицы:

$$
\begin{array}{ccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots\dfrac{2^2}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-2+1}}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-2-0}}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-2-1}}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-2-2}}{2^2+\alpha}\cdots \\
\cdots\dfrac{-a_{-1+2}}{1^2+\alpha} & \dfrac{1^2}{1^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-1-0}}{1^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-1-1}}{1^2+\alpha} & \dfrac{-a_{-1-2}}{1^2+\alpha}\cdots \\
\cdots\dfrac{a_{0+2}}{0^2+\alpha} & \dfrac{a_{0+1}}{0^2+\alpha} & \dfrac{0^2}{0^2+\alpha} & \dfrac{a_{0-1}}{0^2+\alpha} & \dfrac{a_{0-2}}{0^2+\alpha}\cdots \\
\cdots\dfrac{-a_{1+2}}{1^2+\alpha} & \dfrac{-a_{1+1}}{1^2+\alpha} & \dfrac{-a_{1-0}}{1^2+\alpha} & \dfrac{1^2}{1^2+\alpha} & \dfrac{-a_{1-2}}{1^2+\alpha}\cdots \\
\cdots\dfrac{-a_{2+2}}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{2+1}}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{2-0}}{2^2+\alpha} & \dfrac{-a_{2-1}}{2^2+\alpha} & \dfrac{2^2}{2^2+\alpha}\cdots. \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Далее исключим из (10) α_1, кажущийся случайным. Для этого используем формулу

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right).$$

Тогда имеем

$$\sin^2(\pi i \alpha_1) = \pi^2 \prod_{p=1}^{\infty}\frac{(p^2+\alpha)}{p^4}\prod_{\substack{p=-\infty \\ p\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{(p^2+\alpha)^2}\Delta_0,$$

где Δ_0 есть определитель матрицы

$$
\begin{array}{cccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots\ 2^2 & -a_{-2+1} & -a_{-2-0} & -a_{-2-1} & -a_{-2-2} & \cdots \\
\cdots -a_{-1+2} & 1^2 & -a_{-1-0} & -a_{-1-1} & -a_{-1-2} & \cdots \\
\cdots\ a_{0+2} & a_{0+1} & 0^2 & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdots \\
\cdots -a_{1+2} & -a_{1+1} & -a_{1-0} & 1^2 & -a_{1-2} & \cdots \\
\cdots -a_{2+2} & -a_{2+0} & -a_{2-0} & -a_{2-1} & 2^2 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

Тогда имеем,

$$\sin^2(\pi i \alpha_1) = \pi^2 \prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^4}\Delta_0 = \pi^2 \prod_{\substack{p=-\infty \\ p\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{p^2}\Delta_0 = \pi^2 \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & \\
& \frac{1}{2^2} & & & & 0 & \\
& & \frac{1}{1^2} & & & & \\
& & & 1 & & & \\
& & & & \frac{1}{1^2} & & \\
& 0 & & & & \frac{1}{2^2} & \\
& & & & & & \ddots
\end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \cdots\ 2^2 & -a_{-2+1} & -a_{-2-0} & -a_{-2-1} & -a_{-2-2} & \cdots \\ \cdots -a_{-1+2} & 1^2 & -a_{-1-0} & -a_{-1-1} & -a_{-1-2} & \cdots \\ \cdots\ a_{0+2} & a_{0+1} & 0^2 & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdots \\ \cdots -a_{1+2} & -a_{1+1} & -a_{1-0} & 1^2 & -a_{1-2} & \cdots \\ \cdots -a_{2+2} & -a_{2+0} & -a_{2-0} & -a_{2-1} & 2^2 & \cdots \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}=$$

$$=\pi^2\begin{pmatrix} \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \cdots\ 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & -\frac{a_{-2-2}}{2^2} & \cdots \\ \cdots \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \cdots \\ \cdots\ a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdots \\ \cdots \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \cdots \\ \cdots \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+0}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \cdots \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix} = \pi^2 d\,(0). \tag{11}$$

После упрощения имеем

$$\Delta(0)\ \sin^2\pi i\alpha_1=\pi^2\prod_{p=1}^{\infty}\ \frac{\pi^2}{p^4}\Delta_0=\prod_{p=-\infty}^{\infty}\ \frac{\pi^2}{p^2}\Delta_0=\pi^2 d\ (0),$$

где $d(0)$ есть определитель матрицы

$$\begin{matrix} \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \dots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \dots \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{matrix} \tag{12}$$

Составим двойной ряд [2, с. 332]

....

$$
\begin{array}{lllllll}
\ldots & + & \dfrac{-a_{-2+1}}{2^2}+ & \dfrac{-a_{-2-0}}{2^2}+ & \dfrac{-a_{-2-1}}{2^2} & \dfrac{-a_{-2-2}}{2^2}+ & \ldots \\
\ldots+ & \dfrac{-a_{-1+2}}{1^2}+ & \dfrac{a_{-1+1}}{}+ & \dfrac{-a_{-1-0}}{1^2}+ & \dfrac{-a_{-1-1}}{1^2} & \dfrac{-a_{-1-2}}{1^2}+ & \ldots \\
\ldots+ & a_{0+2} & a_{0+1}+ & & a_{0-1} & a_{0-2}+ & \ldots \\
\ldots+ & \dfrac{-a_{1+2}}{1^2}+ & \dfrac{-a_{1+1}}{1^2}+ & \dfrac{-a_{1-0}}{1^2}+ & + & \dfrac{-a_{1-2}}{1^2}+ & \ldots \\
\ldots+ & \dfrac{-a_{2+2}}{2^2}+ & \dfrac{-a_{2+1}}{2^2}+ & \dfrac{-a_{2-0}}{2^2}+ & \dfrac{-a_{2-1}}{2^2} & + & \ldots
\end{array}
$$

....

Складывая по строкам, а затем по столбцам, имеем:

$$S+\frac{S\pi^2}{3},$$

где

$$\cdots+a_{0+2}+a_{0+1}+a_{0-1}+a_{0-2}+\cdots+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}=S \text{, при любом } p,$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}+\cdots.$$

Легко доказать, что матрица (12) нормальная и наконец получаем

$$\sin^2\pi i\mu=d(0)\pi^2, \qquad (13)$$

где

$$\cdots+a_{0+2}+a_{0+1}+a_{0-1}+a_{0-2}+\cdots+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}=S \text{, при любом } p,$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}+\cdots.$$

После элементарных преобразований (13) можно представить в виде

$$z^2+2i\sqrt{\pi^2 d(0)}z-1=0, \quad z=e^{\pi\mu},$$

$$d(0)=\det\left\|\left[d(0)\right]_{pq}\right\|_{-\infty}^{\infty},$$

где $\left[d(0)\right]_{pq}=\begin{cases}\delta_{pq}-\dfrac{a_{p-q}}{p^2}, & p\neq 0,\\ 0\delta_{pq}+a_{o-q}, & p=0,\end{cases}$

или в развернутом виде

$$
\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\dots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \dots \\
\dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \dots \\
\dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\
\dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \dots \\
\dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \dots \\
\multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Это есть окончательный вид характеристического уравнения для уравнения Хилла, которое будем называть каноническим уравнением.

Литература

1. *Карасаев И.К.* Построение фундаментальной системы решений уравнения Хилла // Известия вузов. − 2007. – №3–4. − Бишкек. − С. 240−245.
2. *Каган В.Ф*. Основания теории определителей. – Одесса, 1922. – 393 с.
3. *Бондаренко Г.В*. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. – М.: АН. СССР, 1936. – 48 с.