УДК 517.968 (575.2) (04)

СХЕМА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ РАСЩЕПЛЕНИЯ УНИМОДАЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БОЛЬЦМАНА

П.С. Панков, В.Т. Мураталиева

С помощью метода дополнительного аргумента исследуется явление расщепления максимума унимодального начального условия интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана, произведены численные расчеты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Больцмана; метод дополнительного аргумента; расщепление максимума унимодального начального условия.

Исследуется интегро-дифференциальное уравнение типа Больцмана:

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t}+a\left(v,t,z(v,t)\right)\frac{\partial z(v,t)}{\partial v}+b(v,t)z(v,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(v,v')b(v',t)z(v',t)dv',\ v\in R,\ t\in[0,T] \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(v,0)=z_0(v),\ v\in R. \tag{2}$$

С применением метода дополнительного аргумента в работах [1], [2], [3] установлены достаточные условия существования решений задач вида (1)–(2) и наличия у них асимптотического свойства (стремления решения $z(v,t)$ к нулю при $|v| \to \infty$, если оно есть у начальной функции $z_0(v)$).

Численная реализация метода дополнительного аргумента позволяет получать приближенные решения сразу в исходных координатах. Применимость этого метода для уравнений математической физики показана в [4]. В [5] на основе этого метода реализовано численное решение модельной задачи.

При вычислениях по численным схемам было обнаружено явление, которое мы назвали “расщепление унимодального начального условия”. В статье [6] введено определение явления расщепления максимума унимодального начального условия, описаны условия его возникновения.

В данной работе рассматриваются условия численной реализации метода дополнительного аргумента, при которых проявляется явление расщепления максимума унимодального начального условия.

Расчеты проведены при следующих условиях:

Заданные функции $K(v, v')$, $b(v, t)$, $z_0(v)$, $a(v,t,z(v,t))$ предполагаются неотрицательными, непрерывными и равномерно ограниченными.

Несобственный интеграл предполагается сходящимся.

Для решения исходной задачи (1)–(2) данным методом, воспользуемся следующей системой в интегральной форме, согласно [7]:

$$\begin{aligned}
&\mu(v,t,s)=\int_s^t a\big(v-\mu(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho)\big)d\rho,\\
&w(v,t,s)=\exp\left(-\int_0^s b\big(v-\mu(v,t,\rho),\rho\big)\,d\rho\right)\left[z_0\left(v-\int_0^t a\big(v-\mu(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho)\big)\,d\rho\right)\right]+\\
&+\exp\left(-\int_0^s b\big(v-\mu(v,t,\rho),\rho\big)\,d\rho\right)\left[\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}K\big(v-\mu(v,t,\rho),v',\rho,w(v',\rho,\rho)\big)\exp\left(\int_0^\rho b\big(v-\mu(v,t,\xi),\xi\big)\,d\xi\right)dv'\,d\rho\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Произведем замену: $w(v,t,s)=y(v,t,s)\exp\left(-\int_0^s b\big(v-\mu(v,t,\rho),\rho\big)\,d\rho\right)$.

Тогда система (3) примет вид:

$$\mu(v,t,s)=\int_s^t a\Bigg(v-\mu(v,t,\rho),\,\rho,\,y(v,t,\rho)\exp\bigg(-\int_0^\rho b\big(v-\mu(v,t,\xi),\xi\big)d\xi\bigg)\Bigg)d\rho\,,$$

$$y(v,t,s)=z_0\Bigg(v-\int_0^t a\bigg(v-\mu(v,t,\rho),\rho,y(v,t,\rho)\exp\bigg(-\int_0^\rho b\big(v-\mu(v,t,\xi),\xi\big)\,d\xi\bigg)\bigg)d\rho\Bigg)+$$

$$+\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty} K\bigg(v-\mu(v,t,\rho),v',\rho,\,y(v',\rho,\rho)\exp\bigg(-\int_0^\rho b\big(v-\mu(v,t,\xi),\xi\big)d\xi\bigg)\bigg)dv'd\rho\,\cdot \tag{4}$$

Искомые функции заменяем массивами, которые содержат значения функций в некоторой сеточной области. Так как неизвестные функции μ и y зависят от трех аргументов, то сеточную область получаем трехмерной.

Для приближенного решения системы выберем интервал *[-I v; I v]* вместо $\pm\infty$, где *I v >0*; (нечетное) количество *Nv* узлов по *v*, количество *Nt* узлов по *t* , тогда шаги $d\,v=2*I\,v$ */(N v-1); d t=T/(N v-1);*

v r[v i]=v i·d v - I v. Полагаем

$$\mu\,i\big[vi,ti,si\big]\approx\mu\big(\ v\,r\big[\,vi\,\big],ti\cdot dt,si\cdot dt\ \big),\ y\,i\big[vi,ti,si\big]\approx y\big(\ v\,r\big[\,vi\,\big],ti\cdot dt,si\cdot dt\ \big),$$

где *vi, ti, si* – индексы, соответствующие *v, t, s*.

Тогда систему (4) можно записать в виде:

$$\mu\,i\big[\,vi,ti,si\,\big]=d\,t\sum_{\rho i=si}^{ti-1}a\Bigg(\ v\,r\big[v\,i\big]-\mu\,i\big[\,v\,i,ti,s\,i\,\big],\rho i,yi\big[\,vi,t\,i,si\,\big]\times$$

$$\times\exp\Bigg(-d\,t\sum_{\xi i=0}^{\rho i-1}b\,\Big(v\,r\big[v\,i\big]-\mu\,i\big[\,vi,ti,\xi i\,\big],\xi i\Big)\Bigg)\ \Bigg),$$

$$y\,i\big[\,vi,ti,si\,\big]=z_0\Bigg(\ v\,r\big[\,v\,i\,\big]-d\,t\sum_{\rho i=0}^{ti-1}a\Bigg(\ v\,r\big[\,v\,i\,\big]-\mu\,i\big[\,vi,ti,\rho i\,\big],\rho i,yi\big[\,v\,i,ti,\rho i\,\big]\times$$

$$\times\exp\Bigg(-d\,t\sum_{\xi i=0}^{\rho i-1}b\Big(v\,r\big[\,v\,i\big]-\mu\,i\big[\,vi,ti,\xi i\,\big],\xi i\Big)\Bigg)\ \Bigg)\ \Bigg)+$$

$$+d\,t\cdot d\,v\sum_{\rho i=0}^{si-1}\ \sum_{v1i=0}^{Nv-1}K\Big(v\,r\big[v1i\big]-\mu i\big[\,vi,ti,\rho i\,\big],v1i,\rho i,yi\big[v1i,\rho i,\rho i\big]\Big)\,. \tag{5}$$

Для вычисления по формулам (5) была составлена программа на языке Microsoft Visual C++ 6.0. Для визуализации результатов использовалось программное средство Mat Lab.

Были проведены расчеты для данных:

$$T = 0{,}3;\ I\,v = 5;\ N\,v = 81;\ N\,t = 20;\ K\,(v,v')=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(v-v')^2\right).$$

Количество итераций (последовательных приближений) – 10.

Были проведены вычисления для начальных функций

$$z_0(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-v^2\right)\ \text{и}\ z_0(v)=\begin{cases}(v-1)^2(v+1)^2, & -1\le v\le 1\\ 0, \quad -\infty<v<-1 & ,\quad 1<v<\infty\end{cases},$$

и заданных функций $b(v,t)=\dfrac{2+v^2+t^2}{1+v^2+t^2}$ и $a\,(\,v,t,z\,)=0{,}1$.

Из результатов видно, что для задач с ядром $K\equiv 0$ явления расщепления не возникает.

Литература

1. *Мураталиева В.Т.* Определение условий существования ограниченного решения для квазилинейного упрощенного уравнения Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С. 55–64.
2. *Алексеенко С.Н., Мураталиева В.Т.* Экспоненциальное убывание на бесконечности решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 55–61.
3. *Мураталиева В.Т.* Схема исследования асимптотики решений интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып. 38. – С. 188–194.
4. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени // Докл. АН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
5. *Панков П.С., Иманалиев Т.М., Кененбаева Г.М.* Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента // Юбилейная научн. конф., посв. 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 164.
6. *Панков П.С., Мураталиева В.Т.* Явление расщепления унимодального начального условия для интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 40.
7. *Мураталиева В.Т.* Применение метода дополнительного аргумента для построения численного решения линейного упрощенного решения уравнения Больцмана // Наука и новые технологии. – Бишкек: МОНиМП, 2006. – №1. – С. 175–179.