УДК 517.958

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНО-НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ, ГДЕ ВЫРОЖДАЕТСЯ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

К.Р. Джумагулов

Исследуется многомерная обратно-нелокальная задача для волнового уравнения с оператором Даламбера в неограниченной области, где вырождаются интегральные уравнения Вольтерра третьего рода. Если говорить о прямых задачах, где причины даны, а искомыми являются следствия, то для этого широкого класса задач довольно четко и детально выведены методы решения, что же касается задач обратного характера, где следствия, в качестве которых используются физические компоненты, являются известными данными, а причины есть искомые величины, то этот класс задач является предметом исследований всего физико-математического общества. Такие обратные задачи встречаются в изучении колебательных процессов, при исследовании электромагнитных взаимодействий, а также при различных восстановительных процессах. В определенных условиях исходная задача приводится к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода, достаточная разрешимость которых достигается методами интегральных преобразований и методами системной регуляризации. Приведено решение многомерной обратной задачи математической физики с гиперболическим оператором и обобщены результаты исследований.

Ключевые слова: оператор Даламбера; гиперболический оператор; обратно-нелокальная задача; регуляризация; вырожденное уравнение; неограниченная область.

ВОЛЬТЕРРАНЫН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ТЕҢДЕМЕСИ БУЗУЛА ТУРГАН ЖЕРДЕГИ ТЕСКЕРИ-ЛОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕНИ ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ОПЕРАТОР МЕНЕН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

К.Р. Джумагулов

Бул макалада Вольтерранын үчүнчү түрдөгү маселеси бузула турган жердеги чектелбеген аймакта Даламбердин оператору менен толкундуу теңдеме үчүн көп ченемдүү тескери-локалдык эмес маселе изилдөөгө алынган. Эгерде себептери берилген, ал эми изилденүүчү натыйжа болуп эсептелген түз маселелер тууралуу айта турган болсок, ушул кеңири класстагы маселелер үчүн маселени чыгаруу методдору бир кыйла так жана майда-чүйдөсүнөн бери көрсөтүлгөн, ал эми тескери мүнөздөгү маселелерге келсек, мында натыйжа катары пайдаланылуучу физикалык компоненттер белгилүү маалыматтар болуп эсептелет, ал эми себептери изилденүүчү чоңдуктар болсо, анда бул маселелер классы бүткүл физикалык-математикалык коомдун изилдөө предмети болуп эсептелет. Мындай тескери маселелер электромагниттик өз ара аракеттешүүдө термелүү процесстерин, ошондой эле ар түрдүү калыбына келтирүүчү процесстерди изилдөөдө кездешет. Аныкталган шарттарда баштапкы маселе Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелерине келтирилет, интегралдык кайра түзүү методдору жана системалуу регуляризация методдору менен алардын жетиштүү чечилишине жетүүгө болот. Гиперболикалык оператор менен математикалык физиканын көп кырдуу тескери маселесинин чыгарылышы берилди жана изилдөөнүн натыйжалары жалпыланды.

Түйүндүү сөздөр: Даламбердин оператору; гиперболикалык оператор; тескери-локалдык эмес маселе; регуляризация; чектелбеген аймак.

REGULARIZATION OF THE INVERSE-NONLOCAL PROBLEM WITH A HYPERBOLIC OPERATOR, WHERE A VOLTERRA EQUATION OF THE THIRD KIND DEGENERATES

K.R. Dzhumagulov

The article regards a multidimensional inverse - nonlocal problem for the wave equation with the d'Alembert operator in an unbounded domain, where Volterra integral equations of the third kind degenerate. If we talk about direct problems, where the reasons are given, and the desired are the consequences, then for this wide class of problems, the methods of solution are quite clearly and in detail, as for the problems of the inverse nature, where the consequences, which are used as physical components, are known data, and the reasons are the required quantities, then this class of problems is the subject of research of the entire physics and mathematics society. Such inverse problems are encountered in the study of oscillatory processes, in the study of electromagnetic interactions, as well as in various recovery processes, which undoubtedly gives this work practical significance and scientific relevance. Under certain conditions, the original problem is reduced to the Volterra integral equations of the third kind, the sufficient solvability of which is achieved by the methods of integral transformations and methods of systemic regularization. Thus, in this paper, a solution to a multidimensional inverse problem of mathematical physics with a hyperbolic operator is presented and the results of research are generalized.

Keywords: D'Alembert operator; hyperbolic operator; inverse non-local problem; regularization; degenerate equation; unlimited area.

Введение. Изучение сложных математических моделей, способных описывать естественные процессы жизнедеятельности, а также физические явления окружающего нас мира, нередко приводят к рассмотрению различных прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. К числу их относятся: уравнения колебаний, уравнения газовой динамики, а также уравнения электромагнетизма. В некоторых случаях из этих задач вырождаются корректные, а также некорректные системы интегральных уравнений первого и третьего родов. И, зачастую, задачи обратного характера классифицируются как некорректные или условно-корректные, существование и единственность решения которых не представляется возможным доказать стандартными методами [1], поэтому в определенных условиях достаточная разрешимость может быть доказана методами регуляризации. Вследствие этого нельзя не отметить научную важность уравнений гиперболического характера, где вырождаются неклассические интегральные уравнения Вольтерра третьего рода [2–4], к которым сводятся многие задачи обратного характера [5–7]. Прикладной характер подобных обратных задач, в которых вырождаются интегральные уравнения первого и третьего родов, вносит неоценимый вклад в развитие науки в целом, так как ими описываются реальные физические процессы. Например, восстановительные процессы теории колебаний и теории взаимодействий, в частности, волновые процессы и процессы взаимодействий электромагнитных явлений [8, с. 52–54, 9]. В данной работе рассматривается многомерная обратно-нелокальная задача, которая сводится к неклассическому интегральному уравнению Вольтерра третьего рода с различными пределами интегрирования, тогда как в работе [10] рассмотрены одномерные случаи.

Цель исследования. Основной целью исследования данной работы является построение теории разрешимости интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и обратных задач, сводящихся к этим уравнениям, в частности, получение регуляризованного решения нелинейной обратной задачи в неограниченной области, где вырождаются интегральные уравнения Вольтерра третьего рода с различными пределами интегрирования.

Материалы и методы исследования. Доказательство существования и единственности решения исходной обратной задачи будет представлено с помощью метода вспомогательной функции, методов интегральных преобразований [11] и метода системной регуляризации в пространстве с равномерной метрикой, то есть как система, содержащая задачу Коши с малым параметром и уравнение Вольтерра третьего рода с малым параметром [7].

Результаты исследования и их обсуждение**.** Исследуется обратная задача с оператором Даламбера в неограниченной области:

$$\begin{cases} D_{a_0}U = K(x_1,x_2)(Az)(t) + 2a_0U_{x_1x_2} + \lambda U^2, \ \forall (t,x_1,x_2)\in \overline{Q} = [0,T]\times \mathbf{R}^2, \\ D_{a_0} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_0\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right), \\ (Az)(t) \equiv p(t)z(t) + \int\limits_0^t K_1(t,s)z(s)ds + \int\limits_0^{N(t)} K_2(t,s)z(s)ds, \end{cases} \qquad (1)$$

где решением исследуемой задачи является пара функций ($U(t, x_1, x_2)$; $z(t)$).

Пусть имеют место следующие условия:

$$U_{t^j}^{(j)}\Big|_{t=0} = 0, \ \left(j = (0,1)\right), \qquad (2)$$

$$\left(U_t-\sqrt{a_0}\left(U_{x_1}+U_{x_2}\right)\right)\Big|_{x_i=x_i^0}=\omega(t),\forall t\in[0,T],(i=1,2), \tag{3}$$

где $\lambda, p, a_0, K, K_i, N, \omega$ – известные данные, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases}\omega(t)\in C^1[0,T];\ 0<p(t)\in C[0,T];\forall t\in[0,T),\ p(T)=0;\\ K_i(t,s)\in C^{0,1}(Q_1),(i=1,2),K_1(t,t)\ge\alpha_0>0;K_2(t,N(t))\equiv 0,Q_1=\{(t,s):0\le s\le t\le T\},\\ N(0)=0,0\le N(t)\le t\le T;0\le K\in C^1(R^2):K(x_1^0,x_2^0)\ne 0,\\ 0<a_0\le\alpha_1<\infty;\ 0<\lambda<1,\end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_i=\text{const}$.

Здесь (1)–(4) являются обратно-нелокальной задачей, при этом неизвестными функциями являются ($U(t, x_1, x_2)$; $z(t)$) и исследуются в классе функций $W_C^2(Q)$:

$$\begin{cases}\|\Psi\|_{W_C^2(Q)}=\|U\|_{C^{2,2,2}(\overline{Q})}+\|z\|_{C(0,T)},\left(\Psi=(U,z),Q=(0,T)\times\mathbf{R}^2\right),\\ \Psi=(U,z)\in W_C\left(\overline{Q}\right)=\left\{(U,z):U\in C^{2,2,2}\left(\overline{Q}\right),z\in C[0,T]\right\}\end{cases}$$

Как известно, существуют различные способы решения уравнений вида (1), в случае, когда это уравнение является линейным. В данной же работе, исходное уравнение (1) представлено как нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка. И в силу заданных условий (2)–(4) возникает необходимость ввести новую функцию, именуемую вспомогательной для редуцирования исходной задачи к интегральным уравнениям, содержащим искомые функции *(U;z)*. Для этого воспользуемся идеей работ [6, 7] и, модифицируя указанный метод, введем новую функцию.

Пусть новая функция *V* задана в виде

$$\begin{cases}U_t-\sqrt{a_0}\left(U_{x_1}+U_{x_2}\right)=V,\forall(t,x_1,x_2)\in\overline{Q},\\ V\big|_{t=0}=0,\forall(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,\\ V\big|_{x_i=x_i^0}=\omega(t),(i=1,2),\end{cases} \tag{5}$$

Далее, в соответствии с (5), то есть с заданной новой функцией *V,* выразим искомую функцию *U,* и запишем в следующем виде:

$$\begin{cases}U_{tt}-a_0\left(U_{x_1x_1}+U_{x_2x_2}\right)-2a_0U_{x_1x_2}=V_t+\sqrt{a_0}\left(V_{x_1}+V_{x_2}\right),\\ V_t+\sqrt{a_0}\left(V_{x_1}+V_{x_2}\right)=K(x_1,x_2)(Az)(t)+\lambda U^2,\\ U=\int\limits_0^t V\left(s,x_1+\sqrt{a_0}(t-s),x_2+\sqrt{a_0}(t-s)\right)ds\equiv(B_0V)(t,x_1,x_2);\end{cases} \tag{6}$$

Выполнимость тождества очевидна, так как дифференцируя *U* из (6) по переменным t, x_1, x_2, соответственно имеем:

$$\begin{cases}U_{x_1}=\int\limits_0^t V_{l_1}\left(s,x_1+\sqrt{a_0}(t-s),x_2+\sqrt{a_0}(t-s)\right)ds\equiv\left(B_1V_{x_1}\right)(t,x_1,x_2),\\ U_{x_2}=\int\limits_0^t V_{l_2}\left(s,x_1+\sqrt{a_0}(t-s),x_2+\sqrt{a_0}(t-s)\right)ds\equiv\left(B_2V_{x_2}\right)(t,x_1,x_2),\\ U_t=V(t,x_1,x_2)+\int\limits_0^t\{\sqrt{a_0}V_{l_1}\left(s,x_1+\sqrt{a_0}(t-s),x_2+\sqrt{a_0}(t-s)\right)+\\ +\sqrt{a_0}V_{l_2}\left(s,x_1+\sqrt{a_0}(t-s),x_2+\sqrt{a_0}(t-s)\right)\}ds\equiv\left(B_3[V,V_{x_1},V_{x_2}]\right)(t,x_1,x_2),\\ l_1=x_1+\sqrt{a_0}(t-s);l_2=x_2+\sqrt{a_0}(t-s);\end{cases} \tag{7}$$

Поэтому, учитывая (5) и (6), из исходной задачи (1), получим уравнение:

$$\begin{cases} V_t + \sqrt{a_0}\left(V_{x_1} + V_{x_2}\right) = \lambda\left(\int\limits_0^t V\left(s, x_1 + \sqrt{a_0}\,(t-s), x_2 + \sqrt{a_0}\,(t-s)\right)ds\right)^2 + K\left(x_1, x_2\right)\left(Az\right)\left(t\right), \\ V\big|_{t=0} = 0, \forall\left(x_1, x_2\right) \in \mathbf{R}^2, \end{cases} \tag{8}$$

здесь (8) является интегро-дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому его можно преобразовать к виду:

$$\begin{gathered} V\left(t, x_1, x_2\right) = \int\limits_0^t \{K\left(x_1 - \sqrt{a_0}\,(t-s), x_2 - \sqrt{a_0}\,(t-s)\right)\left(Az\right)\left(t\right) + \lambda(\int\limits_0^s V(s', x_1 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \\ + \sqrt{a_0}\,(s-s'), x_2 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'))ds')^2\}ds \equiv \left(E_0[Az, V]\right)\left(t, x_1, x_2\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Следовательно, учитывая условия заданной новой функции V из (5) и дифференцируя (9) по t, имеем:

$$\begin{gathered} \omega(t) = \int\limits_0^t \{K(x_1^0 - \sqrt{a_0}(t-s), x_2^0 - \sqrt{a_0}(t-s))(Az)(t) + \\ + \lambda(\int\limits_0^s V(s', x_1^0 - \sqrt{a_0}(t-s) + \sqrt{a_0}(s-s'), x_2^0 - \sqrt{a_0}(t-s) - \sqrt{a_0}(s-s'))ds'\}ds \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{cases} V_{x_i} = N_i, \forall\left(t, x_1, x_2\right), \left(i = 1, 2\right), \\ N_i = \int\limits_0^t \{K_{l_i}\left(x_1 - \sqrt{a_0}\,(t-s), x_2 - \sqrt{a_0}\,(t-s)\right)\left(Az\right)\left(t\right) + \\ + 2\lambda\left(\int\limits_0^s V\left(s', x_1 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'), x_2 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s')\right)ds'\right) \times \\ \times \int\limits_0^s N_i(s', x_1 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'), x_2 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'))ds'\}ds \equiv \\ \equiv \left(E_i[Az, V, N_i]\right)\left(t, x_1, x_2\right), \left(i = 1, 2\right), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \omega'\left(t\right) = K\left(x_1^0, x_2^0\right)\left(Az\right)\left(t\right) + \lambda\left(\left(B_0V\right)\left(t, x_1^0, x_2^0\right)\right)^2 + \int\limits_0^t \{-\sqrt{a_0}\sum\limits_{i=1}^{2} K_{l_i}(x_1^0 - \sqrt{a_0}\,(t-s), x_2^0 - \\ - \sqrt{a_0}\,(t-s))\left(Az\right)\left(t\right) + 2\lambda\int\limits_0^s V(s', x_1^0 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'), x_2^0 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \\ + \sqrt{a_0}\,(s-s'))ds' \times \int\limits_0^s (-\sqrt{a_0}\sum\limits_{i=1}^{2} V_{\tau_i}(s', x_1^0 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'), x_2^0 - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \\ + \sqrt{a_0}\,(s-s')))ds'\}ds, \left(l_i = x_i - \sqrt{a_0}\,(t-s);\;\; \tau_i = x_i - \sqrt{a_0}\,(t-s) + \sqrt{a_0}\,(s-s'), \left(i = 1, 2\right)\right). \end{cases} \tag{12}$$

Из (9) и (11) с учетом условия $K\left(x_1^0, x_2^0\right) \neq 0,$ следует:

$$\begin{cases} V\left(t, x_1, x_2\right) = \left(E_0[Az, V]\right)\left(t, x_1, x_2\right), \\ N_i = \left(E_i[Az, V, N_i]\right)\left(t, x_1, x_2\right), \left(i = 1, 2\right), \\ \left(Az\right)\left(t\right) = \left(E_3[Az, V, N_1, N_2]\right)\left(t\right), \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\left(E_3[Az,V,N_1,N_2]\right)(t)\equiv\left(K\left(x_1^0,x_2^0\right)\right)^{-1}\{\omega'(t)-[\lambda\left(\left(B_0V\right)\left(t,x_1^0,x_2^0\right)\right)^2+$$
$$+\int_0^t\{-\sqrt{a_0}\sum_{i=1}^{2}K_{l_i}\left(x_1^0-\sqrt{a_0}\,(t-s),x_2^0-\sqrt{a_0}\,(t-s)\right)\left(Az\right)(t)+2\lambda\int_0^s V(s',x_1^0-\sqrt{a_0}\,(t-s)+$$
$$+\sqrt{a_0}\,(s-s'),x_2^0-\sqrt{a_0}\,(t-s)+\sqrt{a_0}\,(s-s'))ds'\times\int_0^s(-\sqrt{a_0}\sum_{i=1}^{2}V_{\tau_i}(s',x_1^0-\sqrt{a_0}\,(t-s)+$$
$$+\sqrt{a_0}\,(s-s'),x_2^0-\sqrt{a_0}\,(t-s)+\sqrt{a_0}\,(s-s')))ds'\}ds]\}. \tag{14}$$

В данном случае система (13) является системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода по переменной $t\in[0,T]$, где неизвестными являются функции V, N_j, $(j=1,2)$, $(Az)(t)$. С учетом условий (4) исходных данных, следует отметить, что ядро уравнения (14) есть непрерывная функция по совокупности аргументов t и s, а функция $\left(K\left(x_1^0,x_2^0\right)\right)^{-1}\omega'(t)$ – известная непрерывная функция. Вследствие чего заключаем, что уравнение (14) корректно поставлено в пространстве непрерывных функций, когда исходные данные непрерывны, то есть ставится задача найти решение (14) в пространстве $C[0,T]$, поэтому, не нарушая общности, предполагаем, что указанные функции существуют, причем определяются единственным образом, как решение системы (13).

Действительно, при выполнении условий принципа Банаха относительно операторов E_i $(i$ = 0,1,2,3):

$$\begin{cases} E_i{:}L_{E_i}\le\frac{d}{4},\ d<1),\left(i=\overline{0,3};\sum_{i=0}^{3}L_{E_i}\le d<1\right),\\ E_i{:}S_r(0)\to S_r(0),\\ S_r(0)=\left\{V,N_j;Az{:}|V|,\left|N_j\right|,|Az|\le r,\forall\left(t,x_1,x_2\right)\in\overline{Q}\right\},(j=1,2),\end{cases} \tag{15}$$

где L_{E_i}, $i=\overline{0,3})$ – коэффициенты Липшица операторов E_i $(i$ = 0,1,2,3), система (13) разрешима в $C^1(\overline{Q})$, причем решение этого уравнения можем найти методом Пикара, задав начальное приближение.

$$\begin{cases} V_{n+1}(t,x_1,x_2)=\left(E_0[(Az)_n,V_n]\right)(t,x_1,x_2),\\ N_{i,n+1}=\left(E_i[(Az)_n,V_n,N_{i,n}]\right)(t,x_1,x_2),(i=1,2),\\ (Az)_{n+1}(t)=\left(E_3[(Az)_n,V_n,N_{1,n},N_{2,n}]\right)(t),\\ n=0,1,\ldots;(Az)_0=0,V_0=0,N_{i,0}=0,(i=1,2),\\ Y_{n+1}=\|V_{n+1}-V\|_C+\|N_{i,n+1}-N_i\|_C+\|(Az)_{n+1}(t)-(Az)(t)\|_C,\\ Y_0=\|V\|_C+\|N_i\|_C+\|(Az)(t)\|_C\\ Y_{n+1}\le dY_n\le\ldots\le d^{n+1}Y_0\xrightarrow[n\to\infty]{}0,(d<1),\end{cases} \tag{16}$$

далее, на основе (15) и (16) следует:

$$\begin{cases} (Az)_{n+1}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}(Az)(t),\\ V_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}V,\\ N_{i,n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}N_i,\forall\left(t,x_1,x_2\right)\in\overline{Q},(i=1,2).\end{cases} \tag{17}$$

В самом деле, решение, построенное по правилу (16), имеет место. Причем, скорость сходимости процесса будет факториальной, что возможно только для уравнений Вольтерра. Также выполнимость (17) очевидна, так как в постановке задачи (1) λ можно выбрать таким образом, чтобы относительно операторов E_i выполнялись условия принципа Банаха, то есть, когда они сжимающие и отображают область определения в себя. Поэтому из выполнимости (15) следует, что система уравнений (13) имеет единственное решение в указанном классе функций. Резюмируя изложенные выше результаты, получим следующую лемму:

Лемма 1. При выполнении условий (15), система интегральных уравнений (13) разрешима в $C^1(D)$ причем это решение единственно.

Для поиска функции *z(t),* учитывая условия задачи (1), придадим значение оператору *Az*, и введем обозначение:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t (Az)(\tau)d\tau = F(t), \\ F(0) = 0, F(t) \in C^1\left[0,T\right]. \end{cases} \tag{18}$$

Вследствие чего с учетом (1) и (18), получим:

$$\begin{cases} p(t)z(t) + \int\limits_0^t K_1(t,s)z(s)ds + \int\limits_0^{N(t)} K_2(t,s)z(s)ds = F'(t), \\ z\Big|_{t=0} = F'(0)p^{-1}(0) = z_0 = \text{const} \end{cases} \tag{19}$$

далее уравнение (19) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} p(t)\Theta'(t) + K_0(t)\Theta(t) = F_0(t) + (G\Theta)(t), \\ \int\limits_0^t z(s)ds = \Theta(t), \\ \Theta(0) = 0; z(t) = \Theta'(t); |\Theta'| = |z| \le r, \forall t \in [0,T], \\ (G\Theta)(t) \equiv \int\limits_0^t K_{1s}(t,s)\Theta(s)ds + \int\limits_0^{N(t)} K_{2s}(t,s)\Theta(s)ds, \\ F_0(t) \equiv F'(t); K_0(t) \equiv K_1(t,t) \ge \alpha > 0 \end{cases} \tag{20}$$

Введем возмущенную систему, для этого воспользуемся идеей работы [7, с. 102], подобные методы также были применены в работе [10]:

$$\begin{cases} (\varepsilon + p(t))\Theta_\varepsilon{}'(t) + K_0(t)\Theta_\varepsilon(t) \equiv (G\Theta_\varepsilon)(t) + F_0(t), \\ \delta z_\delta(t) + \int\limits_0^t z_\delta(s)ds = \Theta_\varepsilon(t) + \delta z(0), \left(\Theta_\varepsilon(0) = 0\right), \end{cases} \tag{21}$$

где ε, δ – малые параметры. Система (21) эквивалентно преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \Theta_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t W(t,s,\varepsilon)\dfrac{1}{\varepsilon + p(s)}\left\{G\Theta_\varepsilon(s) + F_0(s)\right\} ds \equiv (P\Theta)(t), \\ z_\delta(t) = -\dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t W_0(t,s,\delta)\cdot[\Theta_\varepsilon(s) - \Theta_\varepsilon(t)]ds + \dfrac{1}{\delta}W_0(t,0,\delta)\Theta_\varepsilon(t) + W_0(t,0,\delta)z(0), \end{cases} \tag{22}$$

где имеют место ограничения:

$$\begin{cases} W \equiv \exp(-\int\limits_s^t \dfrac{K_0(\tau)d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}); |W(t,s,\varepsilon)| \le \exp(-\int\limits_s^t \dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}), \\ W_0 \equiv \exp(-\dfrac{1}{\delta}(t-s)), (s \le t). \end{cases} \tag{23}$$

Оценивая первое уравнение системы (22)

$$\begin{cases} |\Theta_\varepsilon(t)| \le \int\limits_0^t \exp(-\int\limits_s^t \dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}) \times \dfrac{1}{\varepsilon + p(s)}\left\{M_0 + M_1\int\limits_0^t |\Theta_\varepsilon(s')|ds' + M_2\|N(t)\|_C\|\Theta_\varepsilon(t)\|_C\right\} ds \le \\ \le \dfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \exp(-\int\limits_s^t \dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}) d\left(-\int\limits_s^t \dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}\right) \times \left\{M_0 + (M_1 T + M_2\|N(t)\|_C)\|\Theta_\varepsilon(t)\|_C\right\} = \\ = \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - \exp(-\int\limits_s^t \dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)})\right)\left\{M_0 + (M_1 T + M_2\|N(t)\|_C)\|\Theta_\varepsilon(t)\|_C\right\} \le \gamma_0 + h\|\Theta_\varepsilon(t)\|_C, \\ M_0 = \sup\limits_{[0,T]}|F_0(t)|, M_1 = \sup\limits_{D_1}|K_{1s}(t,s)|, M_2 = \sup\limits_{D_1}|K_{2s}(t,s)|, \gamma_0 = \dfrac{1}{\alpha}M_0 \\ h = \dfrac{1}{\alpha}\left(M_1 T + M_2\|N(t)\|_C\right) < 1, \end{cases} \tag{24}$$

и учитывая результат оценки (24) в смысле нормы $C\,[0,\mathrm{T}]$, получим:

$$\begin{cases} \|\Theta_\varepsilon(t)\|_C \le (1-h)^{-1}\gamma_0, \\ \|z_\delta(t)\| \le L_{\Theta_\varepsilon}\left(1+\exp(-1)\right)+|q_0| \le 2L_{\Theta_\varepsilon}+|q_0| \equiv N_0 = \mathrm{const}, \\ \Theta_\varepsilon|(t)-\Theta_\varepsilon(s)| \le L_{\Theta_\varepsilon}|t-s|, \left(0<L_{\Theta_\varepsilon}=\mathrm{const}\right). \end{cases} \tag{25}$$

Лемма 2. При выполнении условий (25) система (22) разрешима в $C[0,\mathrm{T}]$, причем

$$(\Theta_\varepsilon(t); z_\delta(t)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0(\delta\to 0)]{} (\Theta(t); z(t)), \forall t\in[0,T]. \tag{26}$$

Действительно, допуская подстановку вида

$$\begin{cases} \Theta_\varepsilon(t) = \Theta(t)+\xi_\varepsilon(t), \\ z_\delta(t) = z(t)+\eta_\delta(t), \forall t\in[0,T), \end{cases} \tag{27}$$

относительно остаточных функций $\xi_\varepsilon(t)$ и $\eta_\delta(t)$, и на основе (23) получим:

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t W(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon+p(s)}\left\{(G\ \ \Theta+\xi_\varepsilon])(s)-(G\Theta)(s)-\varepsilon\Theta_s(s)\right\}ds \equiv (Q\xi_\varepsilon)(t), \\ \eta_\delta(t) = -\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t W_0(t,s,\delta)\left\{\Theta_\varepsilon(s)-\Theta(s)\right\}ds+\frac{1}{\delta}\left\{\Theta_\varepsilon(t)-\Theta(t)\right\}+\Delta(\delta,z), \\ \Delta(\delta,z) = -\frac{1}{\delta}\int\limits_0^t W_0(t,s,\varepsilon)\left\{z(t)-z(s)\right\}ds - W_0(t,0,\delta)(z(t)-z(0)). \end{cases} \tag{28}$$

Оценивая исходную систему (28), имеем:

$$\begin{cases} |\xi_\varepsilon(t)| \le \frac{1}{\alpha}\left(M_1T+M_2\|N_0(t)\|_C\right)\|\xi_\varepsilon(t)\|_C+\frac{1}{\alpha}r\varepsilon, \\ |\eta_\delta(t)| \le \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t \exp(-\frac{1}{\delta}(t-s))|\Theta_\varepsilon(s)-\Theta(s)|ds+\frac{1}{\delta}|\Theta_\varepsilon(t)-\Theta(t)|+|\Delta(\delta,z)|, \left(|z|\le r, \forall t\in C[0,T]\right), \end{cases} \tag{29}$$

следовательно,

$$\begin{cases} \|\xi_\varepsilon(t)\|_C \le (1-h)^{-1}\frac{1}{\alpha}r\varepsilon = N_1\varepsilon, (N_1 = \frac{1}{\alpha}r(1-h)^{-1}), \\ \|\eta_\varepsilon(t)\|_C \le 2N_1\frac{1}{\delta}\varepsilon+\|\Delta(\delta,z)\|_C, \\ \|\Delta(\delta,z)\|_C \le 4\left[\|z\|_C\exp(-\frac{1}{\delta^{1-\beta}})+\omega_z(\delta^\beta)\right] = N_2(\delta), \\ \left(0<\beta<1; 0<L_z; \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\xrightarrow[\delta\to 0(\varepsilon\to 0)]{} 0; \delta(\varepsilon)=\varepsilon^\beta\right), \end{cases} \tag{30}$$

где $\omega_z(\delta^\beta) = \sup\limits_{|t-s|\le\delta}|z(t)-z(s)|$ – модуль непрерывности. Тогда, учитывая подстановку (27) и результаты оценки (30), следует:

$$\begin{cases} \|\Theta_\varepsilon(t)-\Theta(t)\|_C \le N_1\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \|z_\delta(t)-z(t)\|_C \le 2N_1\frac{1}{\delta}\varepsilon+\|\Delta(\delta,z)\|_C \xrightarrow[\delta\to 0(\varepsilon\to 0)]{} 0, \\ \|z(t)\|_C \le 2\left[2N_1\frac{1}{\delta}\varepsilon+N_0+4\omega_z(\delta^\beta)\right] \le r, \\ 0<\delta\le\delta_0 = (\ln 8)^{-\frac{1}{1-\beta}} < 1, \end{cases} \tag{31}$$

то есть

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \forall t\in C[0,T], \\ \eta_\delta(t) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0, \forall t\in C[0,T]. \end{cases} \tag{32}$$

А это означает, что имеет место условие (26), следовательно, лемма 2 доказана.

Пользуясь изложенными выше результатами и доказательствами лемм 1 и 2, сформулируем теорему 1.

Теорема 1. При выполнении условий лемм 1 и 2, обратная задача (1)–(4) регуляризируема в $W_C\ (\overline{Q})$, при этом

$$\begin{cases} \|\Psi\|_{W_C^2(Q)} = \|U\|_{C^{2,2,2}(\overline{Q})} + \|z\|_{C(0,T)}, \left(\Psi = (U,z), Q = (0,T)\times \mathbf{R}^2\right), \\ \Psi = (U,z) \in W_C\left(\overline{Q}\right) = \left\{(U,z) : U \in C^{2,2,2}\left(\overline{Q}\right), z \in C[0,T]\right\}. \end{cases}$$

Заключение. В данной работе изучена обратно-нелокальная задача в неограниченной области с интегральной зависимостью. При заданных условиях с помощью модификации метода вспомогательной функции исходная задача сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, а затем к системе уравнений Вольтерра третьего рода. Для доказательства достаточной разрешимости изучаемой задачи применен системный метод регуляризации в пространстве с равномерной метрикой, где система содержит задачу Коши и интегральное уравнение Вольтерра третьего рода с малыми параметрами [7, с. 97–98]. Полученные результаты исследований доказывают, что методы достижения достаточной разрешимости, применяемые для исходной задачи, могут быть использованы и для задач более сложной структуры и численного решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, вырождающихся из обратных задач математической физики, в частности, из теории взаимодействий электромагнитных явлений, описываемых уравнениями в частных производных с оператором Даламбера [8].

Литература

1. *Аниконов Д.С.* К вопросу о единственности решения обратных задач для уравнений математической физики / Д.С. Аниконов // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 3–9.
2. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
3. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода / Н.А. Магницкий // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19. № 4. С. 970–989.
4. *Омуров Т.Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода / Т.Д. Омуров. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.
5. *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 100–111.
6. *Омуров Т.Д.* Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода / Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев, К.Р. Джумагулов // Наука, техника и образование. 2017. № 1(31). С. 10–15.
7. *Омуров Т.Д.* Обратные задачи в приложениях математической физики / Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, М.Т. Омуров. Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2014. 192 с.
8. *Смульский И.И.* Теория взаимодействия / И.И Смульский. Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та. ННЦ ОИГГМ СО РАН, 1999. 294 с.
9. *Бухгейм А.Л.* Уравнение Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1983. 207 с.
10. *Джумагулов К.Р.* Решение обратной задачи с гиперболическим оператором, где вырождается неклассическое уравнение Вольтерра третьего рода / К.Р. Джумагулов // Вестник Кыргызского Нац. ун-та им. Ж. Баласагына. 2018. № 4(96). С. 17–23.
11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. М.: Наука, 1980. 496 с.