

УДК 539.370:511.525

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЧКИ УПРУГИХ ТЕЛ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Р.М. Султаналиева, А.Т. Конушбаева, Искендер Козубай, Н.Н. Нурланов

Приводятся результаты численных экспериментов по моделированию напряженного состояния точки на основе аппроксимации производных. Рассматривается упругое тело цилиндрической формы. Находятся экстремальные точки перемещения с использованием ряда Тейлора. Исследования закономерностей деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении имеют принципиальное значение как с точки зрения фундаментальных основ теории упругости, так и в плане практических приложений, связанных с прочностными расчётами конструкций и аппаратов новой техники, подверженных воздействию нагрузок. Эти задачи изучения ещё недостаточно полно. Аналитические решения для такого рода задач возможны только для отдельных (и достаточно простых) расчетных схем. Поэтому численное моделирование является важной составной частью исследований как на стадии формулировки и изучения моделей деформирования сплошных сред, так и на стадии анализа и расчётов на прочность конкретных конструктивных элементов и конструкционных материалов. Приводятся математические модели процесса деформирования элементов конструкций, алгоритмы и примеры расчёта в MATLAB.

Ключевые слова: аппроксимация; тензор вращения; перемещение; деформированное состояние; кручение.

ЦИЛИНДР ФОРМАСЫНДАГЫ СЕРПИЛГИЧ ТЕЛОЛОР ЧЕКТИНИН МАКСИМАЛДУУ ЧЫҢАЛУУ АБАЛЫН АНЫКТОО

Р.М. Султаналиева, А.Т. Конушбаева, Искендер Козубай, Н.Н. Нурланов

Бул макалада туундулардын жакындаштырылышына негизделген чекиттин чыңалуу абалын моделдөө боюнча сандык тажрыйбалардын натыйжалары келтирилген. Цилиндр формасындагы ийкемдүү тело каралат. Тейлор катарларын колдонуу менен экстремалдык жылдыруу чекиттери табылган. Татаал жүктөөдө конструкциялык материалдардын майышуусунун мыйзам ченемдүүлүктөрүн изилдөө, ийкемдүүлүк теориясынын фундаменталдык негиздери көз карашынан алып караганда да, ошондой эле жүктүн таасирине кабылган жаңы техниканын конструкцияларынын жана шаймандарынын бекемдигин эсептөө менен байланышкан практикалык тиркемелер планынан алганда да чоң мааниге ээ. Бул милдеттер али толук изилдене элек. Мындай маселелерди талдоочу чечимдер айрым (жана кыйла жөнөкөй) эсептик схемалар үчүн гана мүмкүн болот. Ошондуктан сандык моделдөө туташ чөйрөнүн майышуу моделдерин түзүү жана изилдөө баскычында да, конкреттүү конструктивдүү элементтердин жана конструктивдүү материалдардын бекемдигин талдоо жана эсептөө баскычтарында да изилдөө ишинин маанилүү курамдык бөлүгү болуп саналат. Конструкциянын элементтеринин майышуу процессинин математикалык моделдери, алгоритмдери жана MATLABда эсептөө мисалдары келтирилген.

Түйүндүү сөздөр: аппроксимация; айлануу тензору; жылдыруу; майышкан абал; толгоо.

DETERMINATION OF THE MAXIMUM STRESS STATE OF A POINT OF ELASTIC BODIES OF CYLINDRICAL SHAPE

R.M. Sultanaliyeva, A.T. Konushbaeva, Iskender Kozubay, N.N. Nurlanov

This article presents the results of numerical experiments on modeling the stress state of a point based on the approximation of derivatives. An elastic body of cylindrical shape is considered. The extreme points of displacement are found using the Taylor series. Studies of the regularities of deformation of structural materials under complex loading are of fundamental importance both from the point of view of the fundamental foundations of the theory of elasticity, and in terms of practical applications related to strength calculations of structures and devices of new technology exposed to

loads. These tasks have not yet been fully studied. Analytical solutions for such problems are possible only for separate (and fairly simple) design schemes. Therefore, numerical modeling is an important component of research, both at the stage of formulating and studying models of deformation of continuous media, and at the stages of analysis and strength calculations of specific structural elements and structural materials. Mathematical models of the deformation process of structural elements, algorithms and examples of calculation in MATLAB are given.

Keywords: approximation; rotation tensor; displacement; deformed state; torsion.

Введение. Рассмотрим положение точки в цилиндрической системе координат (рисунок 1), координаты которой задаём в виде:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = h \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < h < l) . \quad (1)$$

При растяжении сплошного цилиндрического тела переменной силой $F(t)$, все точки начинают перемещаться относительно систем координат. Конечные состояния точки характеризуются векторами:

$$\begin{cases} x1 = x01 + u1 \\ x2 = x02 + u2 . \\ x3 = x03 + u3 \end{cases} \quad (2)$$

На различных этапах вычисления необходимо проводить системную обработку максимальных и минимальных численных значений вектора перемещения. Цилиндр состоит из множества отрезков или числа точек внутри ограниченной области. Отсюда следует, что необходимо применить операцию аппроксимации для вектора перемещения.

Аппроксимация первой производной функции: $\Phi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$ при $x = x_1$.

Разлагаем $\Phi_2 = \Phi(x_2) = \Phi(x_1 + \Delta x)$ и $\Phi_3 = \Phi(r_3) = \Phi(r_1 + \Delta r_2) = \Phi(r_1 + a\Delta r_1)$ в ряд Тейлора около точки $r = r_1$ и ограничиваемся третьими членами разложения:

$$\Phi_2 = \Phi(r_1 + \Delta r_1) \approx \Phi(r_1) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot \Delta r_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right|_{r=r_1} \cdot (\Delta r_1)^2, \quad (3)$$

$$\Phi_3 = \Phi(r_1 + a\Delta r_1) \approx \Phi(r_1) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot a\Delta r_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right|_{r=r_1} \cdot a^2 (\Delta r_1)^2, \quad (4)$$

где $\Delta r_1 = r_2 - r_1$, $\Delta r_2 = r_3 - r_1 = a \Delta r_1$.

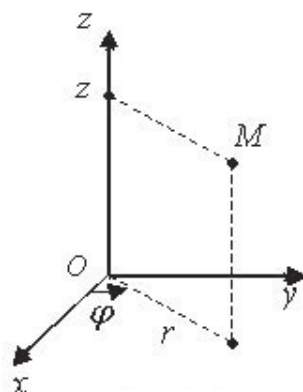


Рисунок 1 – Положение точки в цилиндрической системе координат

Умножаем первое из этих уравнений на $-a^2$ и складываем со вторым:

$$-a^2\Phi_2 + \Phi_3 \approx (1-a^2)\Phi_1 + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot (a-a^2)\Delta r_1, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \approx \frac{a^2\Phi_2 - \Phi_3 - (a^2-1)\Phi_1}{(a^2-a)\Delta r_1}. \quad (6)$$

Аппроксимация первой производной функции $\Phi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$ при $x = x_1$.

Разлагаем $\Phi_{n-1} = \Phi(x_{n-1}) = \Phi(x_n + \Delta x)$ и $\Phi_{n-2} = \Phi(x_{n-2}) = \Phi(x_n - 2\Delta x)$ в ряд Тейлора около точки $x = x_n$, и ограничиваемся третьими членами разложения:

$$\Phi_{n-1} = \Phi(x_n + \Delta x) \approx \Phi(x_n) + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=x_n} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right|_{x=x_n} \cdot (\Delta x)^2, \quad (7)$$

$$\Phi_{n-2} = \Phi(r_1 + 2\Delta r_1) \approx \Phi(r_1) + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot 2\Delta r_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \right|_{r=r_1} \cdot 4(\Delta r_1)^2. \quad (8)$$

Умножаем первое из этих уравнений на -4 и складываем со вторым:

$$-4\Phi_2 + \Phi_3 \approx (1-4)\Phi_1 + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} \cdot (2-4)\Delta r_1, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=x_n} \approx \frac{4\Phi_2 - \Phi_3 - 3\Phi_1}{2\Delta x}. \quad (10)$$

Аппроксимация первой производной функции $\Phi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$ при $x_1 < x_i < x_n$ (для внутренних точек):

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (11)$$

Согласно классической теории упругости, тензор перемещения в цилиндрической системе координат запишем в виде формулы. Боковые грани цилиндра при растяжении изменяются по квадратичной зависимости. Для этого вводим коэффициенты $\dot{a}1$, $\dot{a}2$ и $\dot{a}0$:

$$\begin{cases} u1 = u0(1) + c(t) * R * \cos(O) * (a2 * z.^2 + a1 * z + a0) \\ u2 = u0(2) + c(t) * R * \sin(O) * (a2 * z.^2 + a1 * z + a0), \\ u3 = u0(3) + c(t) * z \end{cases} \quad (12)$$

где $c(t)$ – коэффициент пропорциональности, равный:

$$F_{раст} = c(t) * F_i. \quad (13)$$

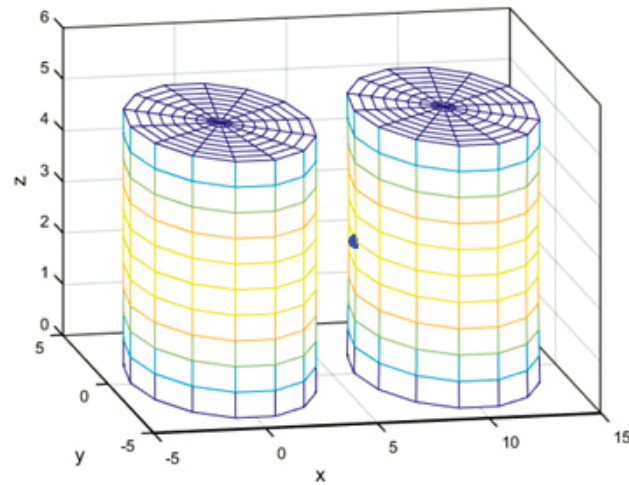


Рисунок 2 – Растяжения цилиндра при $F = 0.023 * 10^6 H$

Координаты максимального перемещения: $ans = 6.0709e + 00 \ 4.8118e - 16 \ 2.5595e + 00$

Значения компонентов перемещения: $ux = -1.0071e + 01$; $uy = 8.6781e - 18$; $uz = -5.9524e - 02$

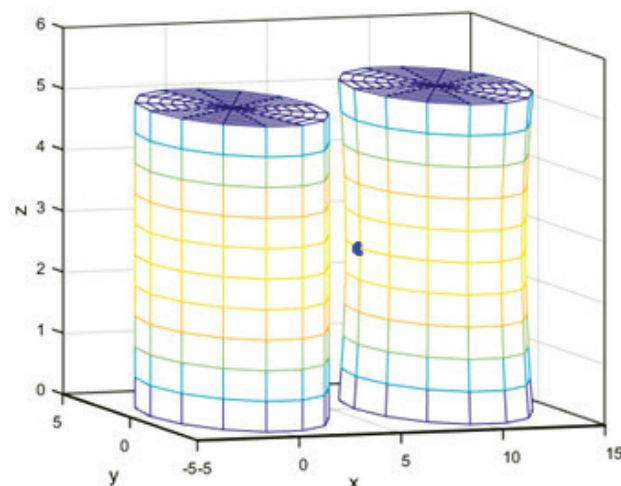


Рисунок 3 – Растяжения цилиндра при $F = 0.045 * 10^6 H$

Координаты максимального перемещения: $ans = 6.2834e + 00 \ 4.5515e - 16 \ 2.6190e + 00$

Значения компонентов перемещения: $ux = -1.0283e + 01$; $3.4712e - 17$; $uz = -1.1905e - 01$

$7.6266e - 02 \ 5.4957e + 00 \ 5.4317e + 00$

тензор деформации: $\varepsilon_{i,j} = 5.4957e + 00 \ 7.6266e - 02 \ 0$

$5.4317e + 00 \ 0 \ -4.5455e - 02$

тензор вращения: $\omega_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 8.5781e + 000 & 8.5781e + 000 \\ -8.5781e + 000 & 0 & 4.0750e - 003 \\ -8.5781e + 000 & -4.0750e - 003 & 0 \end{pmatrix}$

На рисунках 2, 3 область V показана слева. Справа показаны преобразования области V , соответствующей различным значениям растягивающей силы. Максимальное перемещение показано синей точкой.

Аналогичным образом можно получить значения максимального перемещения точки, и определить координату при любых значениях растягивающей силы.

Выводы. Разработан алгоритм численного вычисления экстремального значения вектора перемещения для цилиндрических форм при растяжении. Все численные расчеты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Разработан код программы в среде MATLAB, что значительно упрощает инженерные расчеты при моделировании трехмерных цилиндрических конструкций.

Список использованной литературы

1. *Ощепков А.Ю.* Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB: учеб. пособие / А.Ю. Ощепков. СПб.: Лань, 2013. 208 с.
2. *Поршнев С.В.* Компьютерное моделирование физических систем с использованием пакета MathCAD: учеб. пособие / С.В. Поршнев. М.: Горячая линия – Телеком, 2015. 320 с.
3. *Поршнев С.В.* Компьютерное моделирование физических систем с использованием пакета MathCAD: учеб. пособие / С.В. Поршнев. М.: Горячая линия – Телеком, 2011. 320 с.