УДК 511.2
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-8-3-7

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ЛЮБОЙ ТРОЙКИ ПИФАГОРА

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Аннотация. Огромная популярность задачи на нахождение натуральных решений уравнения Ферма-Пифагора – уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, породила большое количество работ, посвященных нахождению формул, позволяющих непосредственно выписывать решения уравнения. Но магия, заключенная в этой задаче, заставляет снова и снова обращаться к ней. Очередной такой случай описан в этой работе. Отправной точкой служит формула разности квадратов. Оказывается, ее достаточно для того чтобы получить довольно интересный результат: если взять любое натуральное нечетное число, возвести его в квадрат и рассмотреть полученное число как сумму двух последовательных натуральных чисел, то эти числа вместе с исходным числом дают тройку Ферма-Пифагора. Доказательству этого и других, более сложных и интересных утверждений, посвящена предлагаемая работа.

Ключевые слова. Теорема Пифагора; натуральные решения; тройки Ферма-Пифагора; формула разности квадратов; Великая теорема Ферма.

ПИФАГОРДУН АР ТҮРДҮҮ ҮЧТҮГҮН ТАБУУНУН АЛГОРИТМИН ТҮЗҮҮ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Аннотация. Ферма-Пифагордун $x^2 + y^2 = z^2$ теңдемесинин натуралдык чыгарылыштарын табуу маселесинин эбегейсиз популярдуулугу, теңдеменин чыгарылыштарын түздөн түз жазып алууга мүмкүндүк берген формулаларды жаратууга арналган көп сандагы илимий эмгектерди пайда кылган. Бирок бул маселеде камтылган сыйкыр ага кайра-кайра кайрылууга аргасыз кылат. Мындай түрдөгү формулаларды жаратуунун дагы бир аракети сунушталып жаткан эмгекте. Бул аракет квадраттардын айырмасынын формуласына таянат. Көрсө, бул абдан кызыктуу натыйжаны алуу үчүн жетиштүү экен: эгер кандайдыр бир натуралдык так сандын квадратын эки удаалаш натуралдык сандын суммасына ажыратсак, анда баштапкы сан менен бул эки сан Ферма-Пифагордун үчтүгүн түзөт. Сунушталып жаткан эмгек ушул жана андан башка, татаал жана кызыктуу, ырастоолорду далилдөөгө арналган.

Түйндүү сөздөр. Пифагордун теоремасы; табигый чечимдер; Ферма-Пифагор үчилтиктери; квадраттардын айырмасынын формуласы; Ферманын улуу теоремасы.

CONSTRUCTION OF THE ALGORITHM FOR FINDING ANY PYTHAGORAN TRIPLE

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

Abstract. The huge popularity of the problem of finding natural solutions of the Fermat-Pythagorean equation – the equation $x^2 + y^2 = z^2$, are generated a large number of works devoted to finding formulas that allow you to directly write out solutions of the equation. But the magic of this task makes you turn to it again and again. One of these cases is described in this work. The starting point is the difference of squares' formula. It turns out that it is enough to get a rather interesting result: if you take any natural odd number, square it and consider the resulting number as the sum of two consecutive natural numbers, then these numbers together with the initial number give the Fermat-Pythagorean triple. The present work is devoted to the proof of this and other, more complex and interesting assertions.

Keywords: Pythagorean theorem; natural solutions; Fermat-Pythagorean triplets; difference of squares' formula; Fermat's Last Theorem.

Огромная популярность задачи на нахождение натуральных решений уравнения Ферма-Пифагора – уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, которое связывает длину гипотенузы прямоугольного треугольника с длинами катетов, породила большое количество работ, посвященных нахождению формул, позволяющих непосредственно выписывать решения уравнения [1–5]. В данной работе сформулирована и доказана теорема, позволяющая получить все натуральные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Достаточно просто решается задача нахождения решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в случае, когда длина гипотенузы на единицу больше длины катета. Итак, пусть $x^2 + y^2 = (y + 1)^2$, где y – натуральное число. Перепишем уравнение в виде $x^2 = (y + 1)^2 - y^2$, и используем формулу для разности квадратов: $x^2 = [(y + 1) - y][(y + 1) + y] <=> x^2 = [1][(y + 1) + y]$. Последнее равенство указывает на то, что длина меньшего катета – число x, должно быть нечетным числом, и то, что каждое нечетное число x, где x = 3, *5, 7, …* определяет решение уравнения – тройку $(x;\ (x^2 - 1) / 2;\ (x^2 + 1) / 2)$.

Следовательно, в данном случае для того чтобы получить тройку Ферма-Пифагора, достаточно взять любое натуральное нечетное число, возвести его в квадрат и рассмотреть полученное число как сумму двух последовательных натуральных чисел.

Таким образом, в частности,

при $x = 3 => x^2 = 9$ => получается тройка (3; 4; 5);

при $x = 7 => x^2 = 49$ => получается тройка (5; 24; 25);

при $x = 13 => x^2 = 169$ => получается тройка (13, 84; 85).

2. Используем этот подход для случая, когда длина гипотенузы на две единицы больше длины катета.

Итак, $x^2 + y^2 = (y + 2)^2$. Перепишем уравнение в виде $x^2 = (y + 2)^2 - y^2$, и используем формулу для разности квадратов: $x^2 = [(y + 2) - y][(y + 2) + y] <=> x^2 = [2][(y + 2) + y]$ $<=> x^2 = 2^2[y + 1]$. Следовательно, число x можно представить в виде $x = 2x_1$, где x_1 – натуральное число. Тогда $x_1^2 = y + 1 <=> y = x_1^2 - 1$. Поэтому, взяв x_1 нечетным, получим четное значение y. Тогда и $y + 2$, а также $x = 2x_1$ являются четным, то есть все члены пифагоровой тройки будут четными. Например, если $x_1 = 3$, то $x = 2x_1 = 6;\ y = 3^2 - 1 = 8;\ z = y + 2 = 10$. Разделив все эти числа на 2, получим другую, самую известную тройку: (*3, 4, 5*). Понятно, что умножая все члены любой пифагоровой тройки на произвольное натуральное число, получим пифагорову тройку. Поэтому интересной является задача получения примитивных пифагоровых троек – троек, элементы которых не имеют общих множителей. В частности, из предыдущих рассуждений понятно, что для любого нечетного значения x_1 пифагорова тройка вида $\{2x_1;\ x_1^2 - 1;\ x_1^2 + 1\}$ не будет примитивной.

В то же время, выбирая в качестве x_1 натуральные четные числа, будем получать примитивные пифагоровы тройки: $x = 2x_1;\ y = x_1^2 - 1;\ z = y + 2$.

Например,

при $x_1 = 2$ получим: $x = 2x_1 = 4;\ y = x_1^2 - 1 = 3;\ z = y + 2 = 5$;

при $x_1 = 4$ получим: $x = 2x_1 = 8;\ y = x_1^2 - 1 = 15;\ z = y + 2 = 17$;

при $x_1 = 10$ получим: $x = 2x_1 = 20;\ y = x_1^2 - 1 = 99;\ z = y + 2 = 101$;

при $x_1 = 16$ получим: $x = 2x_1 = 32;\ y = x_1^2 - 1 = 255;\ z = y + 2 = 257$.

3. Перейдем к случаю, когда длина гипотенузы больше длины катета на 3 единицы. Итак, $x^2 + y^2 = (y + 3)^2$, и отсюда $x^2 = (y + 3)^2 - y^2 <=>$ $<=> x^2 = [(y + 3) - y][(y + 3) + y] <=> x^2 = [3][2y + 3]$. Следовательно, x^2 делится на 3, а это может быть только в случае, когда *x* делится на 3. Таким образом, число x можно представить в виде $x = 3x_1$, где x_1 – натуральное число. Тогда $x_1^2 = 2y / 3 + 1$. Из последнего равенства следует, что

целое значение x_1 и, соответственно x, возможно только в случае, когда y будет иметь множитель 3. Так как и x в этом случае имеет множитель *3*, получается, что пифагорова тройка не является примитивной.

Итак, примитивных пифагоровых троек, образованных длинами сторон прямоугольных треугольников, у которых длина гипотенузы на 3 больше длины катета, не существует.

4. Рассмотрим случай, когда длина гипотенузы на четыре больше длины катета.

Итак, $x^2 + y^2 = (y + 4)^2$. Перепишем уравнение в виде $x^2 = (y + 4)^2 - y^2$, и по формуле разности квадратов: $x^2 = [(y + 4) - y][(y + 4) + y] <=> x^2 = [4][2y + 4]$. Последнее равенство показывает, что x можно представить в виде $x = 2x_1$, где x_1 – натуральное число. Тогда $x_1^2 = 2y + 2^2$. Отсюда, $y = (x_1^2 - 2^2) / 2$. Число y будет целым только при четных x_1. При этом y будет еще и четным. Итак, выяснилось, что при длине гипотенузы на четыре больше длины катета, пифагорова тройка получится только тогда, когда x и y будут четными, то есть такие тройки не будут примитивными.

Конечно, можно продолжать и перебирать все натуральные числа, одно за другим. Но все мы знаем, что эта дорога конца не имеет. Поэтому предлагаем посмотреть еще два частных случая, а затем перейти к обобщениям.

5. Пусть длина гипотенузы на девять больше длины катета.

Решаем уравнение $x^2 + y^2 = (y + 9)^2$. Перепишем его в виде $x^2 = (y + 9)^2 - y^2$, и используем формулу для разности квадратов: $x^2 = [(y + 9) - y][(y + 9) + y] <=> <=> x^2 = 3^2 \cdot [2y + 9]$. Следовательно, x можно представить в виде $x = 3x_1$, где x_1 – натуральное число. Тогда $x_1^2 = 2y + 3^2$. Отсюда $y = (x_1^2 - 3^2) / 2$. Число y будет целым только при нечетных x_1. Тогда $x = 3x_1$ будет нечетным, а y будет четным. Итак, выяснилось, что при длине гипотенузы на девять больше длины катета, можно получить примитивные пифагоровы тройки. Для этого в качестве x_1 нужно брать натуральные нечетные числа и получать примитивные пифагоровы тройки: $x = 3x_1$, $y = (x_1^2 - 3^2) / 2$, $z = y + 9$.

Например, при $x_1 = 5$ получим: $x = 3x_1 = 15;\ \ y = (x_1^2 - 3^2) / 2 = 8;\ \ z = y + 9 = 17$;

при $x_1 = 7$ получим: $x = 3x_1 = 21;\ \ y = (x_1^2 - 3^2) / 2 = 20;\ \ z = y + 9 = 29$;

при $x_1 = 15$ получим: $x = 3x_1 = 45;\ \ y = (x_1^2 - 3^2) / 2 = 108;\ \ z = y + 9 = 117$

(Ой, получилась не примитивная тройка. Но это легко понять – мы взяли $x_1 = 15$, число, которое имеет множитель 3. Делаем вывод: выбирая x_1 нужно проследить, чтобы это нечетное число не имело в разложении число 3);

при $x_1 = 17$ получим: $x = 3x_1 = 51;\ \ y = (x_1^2 - 3^2) / 2 = 140;\ \ z = y + 9 = 149$.

6. Пусть длина гипотенузы на восемнадцать больше длины катета. В этом случае решаем уравнение $x^2 + y^2 = (y + 18)^2$. Перепишем его в виде $x^2 = (y + 18)^2 - y^2$, и по формуле разности квадратов: $x^2 = [(y + 18) - y][(y + 18) + y] <=> x^2 = 18 \cdot [2y + 18] <=> x^2 = 6^2 \cdot [y + 9]$. Итак, число x можно представить в виде $x = 6x_1$, где x_1 – натуральное число. Тогда $x_1^2 = y + 9 => y = x_1^2 - 9$. При нечетных x_1 число y будет четным. Так как число $x = 6x_1$ тоже четно, соответствующая пифагорова тройка не будет примитивной. Поэтому, рассматриваем только четные x_1. В этом случае y будут нечетными. Итак, выяснилось, что при длине гипотенузы на восемнадцать больше длины катета, примитивные пифагоровы тройки $x = 6x_1$; $y = x_1^2 - 9$; $z = y + 18$ будут получаться, если в качестве x_1 брать натуральные четные числа.

Например, при $x_1 = 4$ получим: $x = 6x_1 = 24$; $y = x_1^2 - 9 = 7$; $z = y + 18 = 25$;

при $x_1 = 6$ получим: $x = 6x_1 = 36$; $y = x_1^2 - 9 = 27$; $z = y + 18 = 45$;

(Опять получилась не примитивная тройка. Но это мы уже проходили – дело в том, что $x_1 = 6$, а число 6 имеет множитель 3. Таким образом, в качестве x_1 нужно рассматривать только натуральные четные числа, не имеющие в разложении цифру 3);

при $x_1 = 10$ получим: $x = 6x_1 = 60$; $y = x_1^2 - 9 = 91$; $z = y + 18 = 109$.

7. Пора перейти к обобщениям. Любое натуральное число можно записать в виде kp^2. Поэтому, если в разложении числа на простые множители есть квадраты чисел, то произведение квадратов запишем в виде p^2, произведение всех остальных множителей – как k. В итоге, можно переформулировать исходную задачу: решить в натуральных числах уравнение $x^2 + y^2 = (y + kp^2)^2$. Для этого перепишем уравнение в виде $x^2 = (y + kp^2)^2 - y^2$, и используем формулу разности квадратов: $x^2 = [(y + kp^2) - y][(y + kp^2) + y] <=> x^2 = kp^2 \cdot [2y + kp^2]$.

Следовательно, число x можно представить в виде $x = px_1$, где x_1 – натуральное число. Тогда $x_1^2 = k[2y + kp^2]$. Далее, нужно рассмотреть три разных случая.

I $k = 1$. Тогда $x_1^2 = [2y + p^2] => y = [x_1^2 - p^2] / 2$.

Для четных p число x_1 должно быть четным, и как следствие, x и y будут четными, что исключает

примитивность пифагоровой тройки.

Пример: $p = 4$, $x_1 = 6 => x = px_1 = 24$; $y = [6^2 - 4^2] / 2 = 10$; $z = y + p^2 = 10 + 16 = 26$.

Для нечетных p число x_1 должно быть нечетным, и как следствие, x будет нечетным, а y – четным. Поэтому, выбирая в качестве x_1 нечетные числа, не имеющие общих множителей с p, будем получать примитивные пифагоровы тройки: $x = px_1$; $y = [x_1^2 - p^2] / 2$; $z = y + p^2$, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = z^2$.

Пример: $p = 5$, $x_1 = 9 => x = px_1 = 45$; $y = [9^2 - 5^2] / 2 = 28$; $z = y + p^2 = 28 + 5^2 = 53$.

II $k = 2$. Тогда, $x_1^2 = 2[2y + 2p^2] <=> x_1^2 = 2^2[y + p^2]$.

Поэтому, $x_1 = 2x_2 => x = px_1 = 2px_2 => y = x_2^2 - p^2$.

В данном случае число $x = px_1 = 2px_2$ всегда будет четно. Поэтому, если число y будет четным, то есть x_2 и p будут иметь одинаковую четность, то примитивная пифагорова тройка не получится. То же случится, если x_2 будет иметь общий множитель с p.

Поэтому, для того чтобы получать примитивные пифагоровы тройки, в качестве x_2 и p нужно выбирать числа разной четности, не имеющие общих множителей. В таком случае будут получены тройки чисел: $x = 2px_2$; $y = x_2^2 - p^2$; $z = y + 2p^2$, удовлетворяющие уравнению: $x^2 + y^2 = z^2$.

Пример: $p = 4$, $x_2 = 9 =>$ $x = 2px_2 = 72$; $y = x_2^2 - p^2 = 81 - 16 = 65$; $z = y + 2p^2 = 65 + 32 = 97$.

III $k > 2$. Тогда, из равенства $x_1^2 = k[2y + kp^2]$ следует, что x_1 делится на k. Далее, так как $x_1^2 = k[2y + kp^2] <=> (x_1 / k)^2 = [2y / k + p^2]$, получаем, что x_1 будет целым только в случае, когда y делится на k. Но если x_1 делится на k, то и $x = px_1$ делится на k. Поэтому, если $k > 2$ примитивная пифагорова тройка, как решение уравнения $x^2 + y^2 = (y + kp^2)^2$, не получится.

8. Оформим полученный результат в виде теоремы.

Теорема

Любое натуральное решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ является результатом умножения тройки вида $\{a;\ b;\ b + kp^2\}$ на некоторое натуральное число. При этом, если:

$k = 1$, то $a = pq$; $b = (q^2 - p^2) / 2$; $b + kp^2 = (q^2 + p^2) / 2$, где p и q – нечетные натуральные числа не имеющие общих множителей, $q > p$;

$k = 2$, то $a = 2pq$; $b = (q^2 - p^2)$; $b + kp^2 = (q^2 + p^2)$, где p и q –натуральные числа разной четности, не имеющие общих множителей, $q > p$;

$k > 2$, то примитивных троек вида $\{a; b; b + kp^2\}$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^2$ нет.

Замечание. Любопытно отметить, что условие существования решения для параметра k в каком-то смысле совпадает с условием существования решения для Великой Теоремы Ферма.

9. Эффективность формулы разности квадратов, неоднократно продемонстрированная выше, наталкивает на мысль использовать другие формулы сокращенного умножения.

Рассмотрим уравнение $x^3 + y^3 = z^3$. Уместно предположить, что уравнение уже приведено к виду, в котором у переменных нет общего множителя – ищем примитивную тройку. Следуя изложенному выше алгоритму, перепишем уравнение в виде $x^3 = (y + k)^3 - y^3$, где k – натуральное число, превосходящее единицу. Раскроем скобки:

$$x^3 = (y + k)^3 - y^3 <=> x^3 = y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3 - y^3 <=> x^3 - k^3 = k(3y^2 + 3yk).$$

Отсюда следует, что x^3 делится на k => x делится на k => $x = kx_1$, где x_1 – натуральное число. Поэтому, $x^3 - k^3 = k(3y^2 + 3yk) <=> <=> x_1^3 - 1 = 3(y / k)^2 + 3(y / k)$. Это равенство возможно только в случае, когда y делится на k.

Итак, выяснилось, что и $\boldsymbol{x}$ делится на $\boldsymbol{k}$, и $\boldsymbol{y}$ делится на $\boldsymbol{k}$, а это противоречит исходному предположению. Следовательно, можно сделать вывод: при $k > 1$ уравнение $x^3 = (y + k)^3 - y^3$ натуральных решений не имеет.

10. В предыдущем пункте не рассматривался случай $k = 1$. Восполним этот пробел. Уравнение $x^3 + y^3 = (y + 1)^3$ можно переписать в виде: $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (y + 1)^3$. Следовательно, $(y + 1)^3$ делится на $(x + y)$, то есть $(y + 1)$ делится на $(x + y)$. А это возможно только при $x = 1$, что влечет равенство $1^3 + y^3 = (y + 1)^3$. Таким образом, $y = 0$, что противоречит условию натуральности y.

Замечание. Следует отметить, что доказательства утверждений пунктов 9 и 10, практически без изменений, можно перенести на случай более высоких степеней.

Заключение. Задача нахождения решения уравнения $x^n + y^n = z^n$ в натуральных числах, возможно, является самой популярной математической задачей. Для случаев, когда показатель степени больше двух, она известна как Великая теорема Ферма. При этом важно отметить, что свой вклад в решение этой задачи внесли наши великие земляки. Так, в работах Abu Mahmud Hamid ibn al-Khidr Al-Khujandi, жившего в десятом веке нашей эры, доказывалось, что сумма кубов натуральных чисел не может быть натуральным числом [6, 7]. Конечно, в случае квадратов, задача несравнимо проще, но это не умаляет ее притягательности, особенно для тех, кто делает свои первые шаги в математике. Надеемся, что материал, изложенный в нашей работе, будет интересен всем любителям математики, особенно тем, кто любит короткие формулировки и предпочитают не использовать чрезмерно сложные математические выкладки [8].

Поступила: 10.06.22; рецензирована: 24.06.22; принята: 28.06.22.

Литература

1. *Eves H.* An Introduction to the History of Mathematics / H. Eves. Saunders, Philadelphia, 1990. 320 p.
2. *Hall A.* Genealogy of Pythagorean triads / A. Hall // Mathematical Gazette 54:390 (1970). Pp. 377–379.
3. *Neugebauer O.* The Exact Sciences in Antiquity / O. Neugebauer. Dover, New York, 1969. 410 p.
4. *Weil A.* Number Theory: An Approach through History from Hummarapi to Legendre / A. Weil. Birkhauser, Boston, 1984. 216 p.
5. *Beauregard R.A.* and Suryanarayan E.R. Pythagorean Triples: The Hyperbolic View / R.A. Beauregard and E.R. Suryanarayan // The College Mathematics Journal 27. 1996. Pp. 170–181.
6. *Marcorini E.* The History of Science and Technology: A Narrative Chronology /. E. Marcorini. 1988. P. 91. 889 p.
7. *Turing D.* The Story of Computing / D. Turing // Arcturus Publishing. 2018. P. 9. 790 p.
8. *Кыдыралиев С.К.* Модная формула / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. Бишкек, 2020. Т. 20. № 4. С. 3–9.