

УДК 519.63:532.5

**ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ
ДВИЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВОДОЕМЕ**

С.Н. Скляр, И.А. Турдушев

Разработан новый численный метод для расчета горизонтальных компонент вектора скорости в модели ветровых течений в водоеме. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие его эффективность.

Ключевые слова: математическое моделирование; гидродинамика водоемов; проекционный вариант интегро-интерполяционного метода.

**DEVELOPMENT OF DIFFERENCE SCHEME FOR CALCULATION OF HORIZONTAL
COMPONENTS OF MOTION IN THE THREE-DIMENSIONAL WIND FLOWS MODEL**

S.N. Sklyar, I.A. Turdushev

A new numerical method for calculation of horizontal components of velocity vector in the wind flows model was developed. Numerical experiments that demonstrated efficiency of the numerical method were performed.

Key words: mathematical modeling; hydrodynamics of reservoirs; projective variant of integro-interpolation method.

Постановка задачи. Математическая модель ветровых течений в водоеме основана на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики, записанных в традиционных приближениях, и включает уравнения движения, статики, неразрывности, переноса тепла, а также уравнение состояния [1]. В настоящей работе мы рассмотрим систему уравнений движения, определяющую горизонтальные компоненты вектора скорости течения, предложим ее аппроксимацию и опишем алгоритм расчета горизонтальных компонент движения.

Систему уравнений движения запишем в виде одного уравнения в комплексной форме:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + i\ell \theta - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = F(P^s) + G(\rho, \theta), \quad (1)$$

где $\theta = u + iv$, $F(P^s) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial P^s}{\partial x} + i \frac{\partial P^s}{\partial y} \right)$, $G(\rho, \theta) = G_1(\rho, u, v) + iG_2(\rho, u, v)$; u и v – горизонтальные компоненты вектора скорости; P^s – давление на невозмущенной поверхности; ρ , ρ_0 – плотность и ее среднее значение; $G_1(\rho, u, v)$ и $G_2(\rho, u, v)$ – члены в уравнениях движения, отвечающие за адвективный перенос и горизонтальную диффузию; $\ell > 0$ – параметр Кориолиса; k – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости. Все переменные рассматриваются в области $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Omega_0, 0 < z < H(x, y)\}$, где Ω_0 – зеркало водоема, расположенное в плоскости $\{z = 0\}$ функция $H(x, y) > 0$ описывает рельеф дна. Уравнение (1) дополняется граничными условиями, параметризующими напряжение ветра на поверхности и трение о дно водоема:

$$z = 0: \quad k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau^w, \quad (x, y) \in \Omega_0; \quad (2)$$

$$z = H: \quad k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau^b, \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (3)$$

а также начальным условием:

$$t = 0: \quad \theta = \theta^0(x, y, z). \quad (4)$$

Разностная схема для задачи (1)–(4). Для построения разностной схемы используем проекционный вариант интегро-интерполяционного метода [2], что позволит естественным образом учитывать краевые условия Неймана (2), (3) и добиться высокой точности численного решения в поверхностном и придонном слоях трения Экмана [3]. С этой целью рассмотрим, вообще говоря, неравномерную сетку $\{z_j | j = 1, 2, \dots, N\}$ с шагами $\Delta z_{j+1/2} = z_{j+1} - z_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) и числом узлов $N = N_{x,y}$, зависящим от фиксированной горизонтальной координаты (x, y) как от параметра. Умножим уравнение (1) на произвольную функцию $\varphi(x, y, z)$, результат проинтегрируем по сеточной ячейке $[z_j, z_{j+1}]$, в том числе и по частям, в итоге получим:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi dz + \left(k \theta \frac{\partial \varphi}{\partial z} - k \frac{\partial \theta}{\partial z} \varphi \right)_{z_j}^{z_{j+1}} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \theta \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - i \ell \varphi \right] dz + \int_{z_j}^{z_{j+1}} (F + G) \varphi dz. \quad (5)$$

Выберем тестовую функцию φ так чтобы обратить в ноль первый интеграл в правой части (5), с этой целью положим (зависимость от x, y рассматриваем как параметрическую и внимания на ней не акцентируем):

$$\varphi_j(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}, \quad z_j \leq z \leq z_{j+1}, \quad \lambda = (1+i)\sqrt{\ell/2k}.$$

Рассмотрим две различные тестовые функции $\varphi_j^{(0)}(z)$ и $\varphi_j^{(1)}(z)$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_j^{(0)}(z_j) = 1, \quad \varphi_j^{(0)}(z_{j+1}) = 0; \quad \varphi_j^{(1)}(z_j) = 0, \quad \varphi_j^{(1)}(z_{j+1}) = 1.$$

Такие функции легко отыскать:

$$\varphi_j^{(0)}(z) = \frac{e^{\lambda(z_{j+1}-z)} - e^{-\lambda(z_{j+1}-z)}}{e^{\lambda \Delta z_{j+1/2}} - e^{-\lambda \Delta z_{j+1/2}}}, \quad \varphi_j^{(1)}(z) = \frac{e^{\lambda(z-z_j)} - e^{-\lambda(z-z_j)}}{e^{\lambda \Delta z_{j+1/2}} - e^{-\lambda \Delta z_{j+1/2}}}.$$

Полагаем в (5): $\varphi = \varphi_j^{(0)}(z)$, с целью аппроксимации оставшихся интегралов значения функций θ и $F + G$ в сеточной ячейке заменим значениями на левой границе, обозначая $R_{j+1/2} = \lambda \Delta z_{j+1/2} / 2$, получим:

$$\frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} \cdot \frac{\partial \theta_j}{\partial t} + \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z_j} - k \theta_{j+1} \frac{\lambda}{\text{sh}(2R_{j+1/2})} + k \theta_j \lambda \text{cth}(2R_{j+1/2}) = \frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} \cdot (F + G_j). \quad (6)$$

Аналогично, подставляя в (5) $\varphi = \varphi_j^{(1)}(z)$ и заменяя значения функций θ и $F + G$ в сеточной ячейке их значениями на правой границе, получим:

$$\frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} \cdot \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial t} - \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z_{j+1}} + k \theta_{j+1} \lambda \text{cth}(2R_{j+1/2}) - k \theta_j \frac{\lambda}{\text{sh}(2R_{j+1/2})} = \frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} \cdot (F + G_{j+1}). \quad (7)$$

Для аппроксимации уравнений (6) и (7) по времени проинтегрируем их от t_0 до $t_0 + \tau$, интеграл по этому интервалу в левой части полученных соотношений вычислим при помощи однопараметрической формулы прямоугольников, учет $F(P^s)$ будем считать неявным, а $G(\rho, \theta)$ будем рассматривать в момент времени t_0 , в итоге получим:

$$\frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} D_t \theta_j + S_t^\sigma \left[k \frac{\partial \theta_j}{\partial z} - k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \cdot \frac{2R_{j+1/2}}{\text{sh}(2R_{j+1/2})} + k \lambda \text{th}(R_{j+1/2}) \cdot \theta_j \right] = \frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} \cdot (F + G_j^0); \quad (8)$$

$$\frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} D_t \theta_{j+1} + S_t^\sigma \left[-k \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial z} + k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \cdot \frac{2R_{j+1/2}}{\text{sh}(2R_{j+1/2})} + k \lambda \text{th}(R_{j+1/2}) \cdot \theta_{j+1} \right] = \frac{\text{th}(R_{j+1/2})}{\lambda} \cdot (F + G_{j+1}^0). \quad (9)$$

Здесь: $D_t \theta = \frac{\theta - \theta^0}{\tau}$ – оператор разностного дифференцирования; $S_t^\sigma \varphi = \sigma \varphi + (1 - \sigma) \varphi^0$ – оператор осреднения с параметром $\sigma \in [0, 1]$.

Сложим уравнения (8) и (9), предварительно заменив в (9) индекс j на $j - 1$, тем самым, исключая поток $k \frac{\partial \theta_j}{\partial z}$, в результате получим разностные уравнения во внутренних узлах сетки ($j = 2, 3, \dots, N - 1$):

$$\begin{aligned} & \frac{\text{th}(R_{j+1/2}) + \text{th}(R_{j-1/2})}{\lambda} \cdot D_t \theta_j + S_t^\sigma \left\{ k \lambda \left[\text{th}(R_{j+1/2}) + \text{th}(R_{j-1/2}) \right] \theta_j - k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{2R_{j+1/2}}{\text{sh}(2R_{j+1/2})} + k \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \cdot \frac{2R_{j-1/2}}{\text{sh}(2R_{j-1/2})} \right\} = \frac{\text{th}(R_{j+1/2}) + \text{th}(R_{j-1/2})}{\lambda} \cdot (F + G_j^0). \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая в (8) $j = 1$, и используя краевое условие (2) для вычисления потока $k \frac{\partial \theta_1}{\partial z}$, получим разностное соотношение:

$$\frac{\text{th}(R_{3/2})}{\lambda} D_t \theta_1 + S_t^\sigma \left[-\frac{\tau^w}{\rho_0} - k \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta z_{3/2}} \frac{2R_{3/2}}{\text{sh}(2R_{3/2})} + k\lambda \text{th}(R_{3/2}) \theta_1 \right] = \frac{\text{th}(R_{3/2})}{\lambda} (F + G_1^0). \quad (11)$$

Аналогично, полагая в (9) $j = N - 1$, и используя краевое условие, получим следующее разностное уравнение:

$$\frac{\text{th}(R_{N-1/2})}{\lambda} D_t \theta_N + S_t^\sigma \left[\frac{\tau^b}{\rho_0} + k \frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{\Delta z_{N-1/2}} \frac{2R_{N-1/2}}{\text{sh}(2R_{N-1/2})} + k\lambda \text{th}(R_{N-1/2}) \theta_N \right] = \frac{\text{th}(R_{N-1/2})}{\lambda} (F + G_N^0). \quad (12)$$

Система уравнений (10)–(12) в случае известной правой части $F + G^0$, может быть решена, например, одним из методов прогонки [4].

Методика расчета бароклининой составляющей движения. Использовать разностную схему (10)–(12) для расчета компонент u и v вектора скорости “напрямую” невозможно, так как правая часть $F(P^s)$ содержит не известные градиенты давления. Общепринятый метод такого расчета основан на выделении баротропной составляющей (усредненной по глубине):

$$\bar{u}(t, x, y) = \frac{1}{H(x, y)} \int_0^{H(x, y)} u(t, x, y, z) dz, \quad \bar{v}(t, x, y) = \frac{1}{H(x, y)} \int_0^{H(x, y)} v(t, x, y, z) dz,$$

и бароклининой составляющей (отклонение от средней):

$$\hat{u} = u - \bar{u}, \quad \hat{v} = v - \bar{v}$$

составляющих движения ([5], [6]). Методы определения баротропной составляющей движения предложены в работах [7], [8]; здесь мы обсудим методику вычисления бароклининой составляющей.

Рассмотрим вспомогательную функцию θ' , которая является решением задачи, отличающейся от (10)–(12), (4) только отсутствием величин $F(P^s)$ в правых частях уравнений. Докажем, что бароклининая составляющая функции θ' совпадает с бароклининой составляющей функции θ , т.е.

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}'. \quad (13)$$

В свою очередь, зная величины θ'_j ($j = 1, 2, \dots, N$), бароклинные составляющие этой функции можно найти по формуле:

$$\hat{\theta}'_j = \theta'_j - \bar{\theta}' = \theta'_j - H^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Delta z_{k+1/2}}{2} (\theta'_{k+1} + \theta'_k), \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad H = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Delta z_{k+1/2}}{2}.$$

Для доказательства (13) рассмотрим функцию $\tilde{\theta} = \theta - \theta'$. Очевидно, что эта функция является решением системы уравнений (10)–(12), (4) с

$$\tau^w = \tau^b = \theta^0 = G^0 = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим вспомогательную сеточную функцию ϕ , которая является решением задачи:

$$D_t \phi + i\ell S_t^\sigma \phi = F; \quad \text{и } \phi = 0 \text{ при } t = 0.$$

Решение этой задачи, очевидно, существует единственно и не зависит от вертикальной координаты (т. е. от j), поскольку величины ℓ и F от j не зависят. Более того, легко проверить, что функция ϕ также является решением задачи (10)–(12), (4), (14). При условии, что решение этой задачи единственно, получаем $\theta - \theta' = \tilde{\theta} = \phi$: $\hat{\phi} = 0$. Теперь (13) следует из равенства. Для завершения рассуждений достаточно доказать единственность решения задачи (10)–(12), (4), (14). К условиям (14) добавим условие $F = 0$, докажем, что решение также будет нулевым. Для простоты сетку будем считать равномерной, т.е. $\Delta z_{j+1/2} = \Delta z$ ($j = 1, 2, \dots, N - 1$). Уравнения (10)–(12) в этом случае можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{cases} B\theta_1 - 2A\theta_2 = 0, \\ -A\theta_{j-1} + B\theta_j - A\theta_{j+1} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \\ -2A\theta_{N-1} + B\theta_N = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$A = \frac{k\sigma\tau}{(\Delta z)^2} \left(\frac{R}{\text{sh}R} \right)^2, \quad B = 1 + i\sigma\tau\ell + 2A.$$

Простые преобразования в (15) позволяют доказать неравенство:

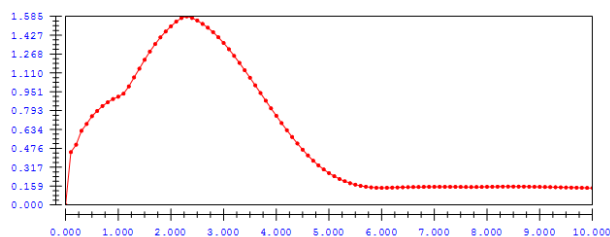


Рисунок 1 – Погрешность вычисления бароклинной составляющей для u

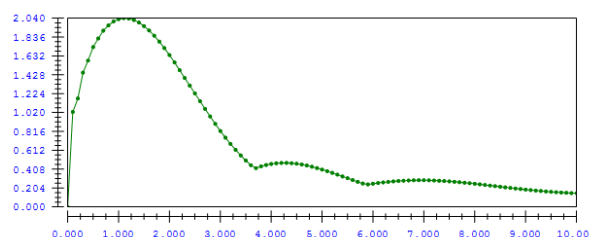


Рисунок 2 – Погрешность вычисления бароклинной составляющей для v

$$(|B| - 2|A|)\|\theta\|_{\infty} \leq 0,$$

в котором $\|\theta\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq N} |\theta_j|$ – норма Чебышева. Остается показать, что $|B| - 2|A| > 0$. Это неравенство следует из представления:

$$|B|^2 - 4|A|^2 = 1 + 2\tau\sigma\ell \frac{sh(\eta)\sin(\eta)}{[ch(\eta) - \cos(\eta)]^2} + (\tau\sigma\ell)^2 \frac{sh^2(\eta) - \sin^2(\eta)}{[ch(\eta) - \cos(\eta)]^2}, \quad \eta = \Delta z \sqrt{\ell/2k},$$

правая часть которого больше нуля для любых положительных значений шагов сетки τ и Δz , а также $\sigma \in [0, 1]$. Доказательство последнего утверждения мы не приводим, чтобы не усложнять изложение.

Численные эксперименты. Приведем результаты тестирования предлагаемой разностной схемы и методики расчета бароклинной составляющей движения. Тестирование проводили на упрощенной модели ветровых течений, предложенной в работе [9], там же найдены классы аналитических решений, которые мы использовали для оценки точности предлагаемых методов. Численные эксперименты проводили при следующих значениях параметров модели:

$$\rho_0 = 1, \ell_0 = 1, \beta = 0, r = 1, q = 1, H = 1, k = 0.05, \mu = 0.5, F_1 = 10, F_2 = 0.$$

Относительные погрешности вычисляли по формуле:

$$Error(\psi) = \frac{\max |\psi_{i,j,k} - \tilde{\psi}_{i,j,k}|}{\max |\psi_{i,j,k}|} \cdot 100(\%),$$

где $\psi_{i,j,k}, \tilde{\psi}_{i,j,k}$ – точное и приближенное решения, соответственно. Число узлов равномерной сетки по направлениям Ox и Oy выбирали постоянным и равным 20, число узлов равномерной сетки по направлению Oz (величина N) и шаг сетки по времени τ – варьировали.

Таблица 1 – Эксперименты при $\sigma = 0.5$

Параметры схемы	Погрешность u , %		Погрешность v , %	
	финальная	максимальная	финальная	максимальная
$N = 20, \tau = 0.1$	0.14	1.59	0.14	2.04
$N = 20, \tau = 0.05$	0.14	0.67	0.14	0.94
$N = 40, \tau = 0.1$	0.03	1.77	0.04	2.20
$N = 40, \tau = 0.05$	0.03	0.85	0.04	1.07

Таблица 2 – Эксперименты при $\sigma = 1$

Параметры схемы	Погрешность u , %		Погрешность v , %	
	финальная	максимальная	финальная	максимальная
$N = 20, \tau = 0.1$	0.14	0.91	0.13	0.63
$N = 20, \tau = 0.05$	0.14	0.60	0.13	0.41
$N = 40, \tau = 0.1$	0.03	0.73	0.03	0.60
$N = 40, \tau = 0.05$	0.03	0.40	0.03	0.31

На рисунках 1 и 2 приведены графики изменения погрешностей вычисления бароклинных составляющих горизонтальных компонент u и v скорости течения при $N = 20$, $\tau = 0.1$, $\sigma = 0.5$. По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат – погрешность. На графиках видно, что с течением времени погрешность сначала растет до максимальной, после чего уменьшается, стабилизируясь на некотором “финальном” уровне. Такое поведение погрешности характерно и для других значений параметров N , τ , σ .

В таблицах 1 и 2 приведены результаты экспериментов по оценке влияния величин N и τ на точность разностной схемы.

Анализ результатов, приведенных в таблицах, позволяет сделать вывод, что уменьшение шага по времени τ и увеличение числа узлов сетки N по вертикальной координате приводят к уменьшению финальной погрешности, что иллюстрирует сходимость разностной схемы. Отметим, что величины погрешностей демонстрируют достаточно высокую точность разностной схемы, причем максимальные погрешности схемы при $\sigma = 1$ существенно меньше, чем соответствующие погрешности при значении параметра $\sigma = 0.5$.

Литература

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование циркуляции океана / Г.И. Марчук, А.С. Саркисян. М.: Наука, 1988. 302 с.
2. Еремеев В.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов / В.Н. Еремеев, В.П. Кочергин, С.В. Кочергин, С.Н. Скляр. Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2001. 238 с.
3. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика / Дж. Педлоски. М.: Мир, 1984. Т. 1. 398 с.
4. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
5. Bryan K. A numerical method for the study of the circulation of the World Ocean / K. Bryan // J. Comp. Phys. 1969. Vol. 4. № 3. P. 347–376.
6. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана / Г.И. Марчук. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 303 с.
7. Sklyar S.N. Computing of barotropic components of motion in problems of water circulation in reservoir / S.N. Sklyar, M.A. Rylov // Study of the Issyk-Kul lake hydrodynamics with the use of isotopic methods, ISTC. Part II. Bishkek: Ilim, 2006. P. 21–30.
8. Турдушев И.А. Построение разностной схемы для расчета интегральных составляющих движения в трехмерной модели ветровых течений в водоеме / И.А. Турдушев // Вестник КРСУ. 2015. Том 15. №5. С. 91–95.
9. Турдушев И.А. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме / И.А. Турдушев, С.Н. Скляр // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: матер. 2-й между. юбил. конф., посв. 20-летию образов. КРСУ и 100-летию профессора Я.В. Быкова. 5–7 сент. 2013 г. / под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. Бишкек: Изд-во Махprint, 2013. Том 2. С. 214–218.