УДК 515.122

О τ-МЕТРИЗУЕМЫХ, ПРОЕКТИВНО τ-МЕТРИЗУЕМЫХ И ПОЧТИ τ-МЕТРИЗУЕМЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

А.А. Борубаев

Ряд результатов, полученных в классах почти метризуемых и проективно метризуемых групп, перенесены на классы почти τ-метризуемых и проективно τ-метризуемых топологических групп, установлены новые специфические свойства таких групп.

Ключевые слова: топологическая группа; метризуемая группа; почти метризуемая группа; проективно метризуемая группа.

ON τ – METRIZABLE, PROJECTIVELY τ – METRIZABLE AND ALMOST τ – METRIZABLE TOPOLOGICAL GROUPS

A.A. Borubaev

Some results obtained in classes of almost metrizable groups and projectively metrizable groups are transmitted to classes of almost τ-metrizable groups and projectively τ-metrizable groups; new specific properties of such groups are established.

Keywords: topological group; metrizable group; almost metrizable group; projectively metrizable group

Обозначим $R_+ = [0,\infty)$. Пусть τ – произвольное кардинальное число. Обозначим через R_+^{τ} – тихоновское произведение τ штук копий пространств R_+ (с естественной топологией). В пространстве R_+^{τ} естественным образом (покоординатно) определены операции сложения «$+$» и умножения на скаляр, а также естественная частичная упорядоченность «$\leq$» (по координатам).

Определение 1. *Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho_\tau : X\times X\to R_+^{\tau}$ называется τ–метрикой на X, а пара (X,ρ_τ) – τ–метрическим пространством, если выполняются следующие известные аксиомы:*

1. $\rho_\tau(x,y) = \theta$ *тогда и только тогда, когда $x = y$, где θ – точка пространства R_+^{τ}, все координаты которой состоят из нулей;*
2. $\rho_\tau(x,y) = \rho_\tau(y,x)$ *для всех $x,y\in X$;*
3. $\rho_\tau(x,y)\leq \rho_\tau(x,z)+\rho_\tau(z,y)$ *для всех $x,y,z\in X$.*

Как известно, понятие метрического и полного метрического пространства в 1905 году ввел и изучил М. Фреше [1].

Пусть $\{(X_\alpha,\rho_\alpha): \alpha\in A\}$ – произвольное семейство метрических пространств и пусть $\tau = |A|$. Тогда $\rho_\tau(x,y)=\{\rho_\alpha(x_\alpha,y_\alpha): \alpha\in A\}$ является τ-метрикой на X, где $x=\{x_\alpha: \alpha\in A\}$, $y=\{y_\alpha: \alpha\in A\}$, $x_\alpha,y_\alpha\in X_\alpha$ для каждого $\alpha\in A$.

Отсюда следуют обильные примеры τ-метрических пространств.

Всякая τ-метрика ρ_τ на множестве X следующим образом порождает топологию T_{ρ_τ} и равномерность U_{ρ_τ}.

Окрестностями произвольной точки $x\in X$ объявим множества вида $\{y\in X: \rho_\tau(x,y)\in O(\theta)\}$, где $O(\theta)$ – окрестность точки θ в пространстве R_+^{τ}. Они порождают топологию T_{ρ_τ} на X, причем (X, T_{ρ_τ}) будет тихоновским пространством.

Положим $V_{O(\theta)} = \{(x,y): \rho_\tau(x,y)\in O(\theta)\}$. Тогда семейство

$\{V_{O(\theta)}: O(\theta)$ пробегает фундаментальную систему окрестностей точки θ в пространстве $R_+^{\tau}\}$ – образует базу (мощности τ) некоторой равномерности U_{ρ_τ}.

Наиболее общие метрики над топологическими полуполями рассмотрены в работах, например [2] и др. Но они для наших целей не пригодны.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ – фильтр с базой $\mathcal{B}$ в топологическом пространстве (X,T). Говорят, что $x\in X$ называется пределом фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ (соответственно базы $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$), если каждая окрестность точки x есть элемент фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

В этом случае говорят также фильтр $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ (соответственно база $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$) сходится к точке x.

Пусть $\mathcal{F}$ – фильтр в τ–метрическом пространстве (X,ρ_τ). Фильтр $\mathcal{F}$ называется фильтром Коши в (X,ρ_τ), если для любой окрестности $O(\theta)$ точки θ в пространстве R_+^{τ} найдется $A\in\mathcal{F}$ такой, что $\rho_\tau(x,y)\in O(\theta)$ для всех $x,y\in A$.

Определение 2. *Пусть (X,ρ_τ) – τ–метрическое пространство и $\aleph_0\leq\mu\leq\tau$. Будем говорить, что τ–метрическое пространство (X,ρ_τ) называется* ***μ–полным****, если всякий фильтр Коши $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ с базой $\mathcal{B}$ мощностью μ сходится в (X,T_{ρ_τ}). Если $\mu=\tau$, то τ-метрическое пространство (X,ρ_τ) называется* ***полным****, а если $\mu=\aleph_0$, то τ – метрическое пространство (X,ρ_τ) называется* ***секвенциально полным****.*

μ-полное τ-метрическое пространство (X',ρ_τ') называется ***μ–пополнением*** *τ–метрического пространства (X,ρ_τ), если 1)$X\subset X'$, 2)$[X]=X'$ и $\rho_\tau=\rho_\tau'|_{X\times X}$.*

Изометричность τ-метрических пространств определяется по аналогии с изометричностью метрических пространств.

Теорема 1. Всякое τ-метрическое пространство (X,ρ_τ) имеет единственное с точностью до изометрии μ–пополнение, где $\aleph_0\leq\mu\leq\tau$.

Отображение $f:(X,\rho_\tau)\to(X,\rho_\tau)$ называется ***сжимающим***, если существует $c\in(0,1)$, такое, что $\rho_\tau(fx,fy)\leq c\rho_\tau(x,y)$ для всех $x,y\in X$.

Теорема 2. *Пусть (X,ρ_τ) – секвенциально полное τ-метрическое пространство, а $f:(X,\rho_\tau)\to(X,\rho_\tau)$ – сжимающее отображение. Тогда существует такая единственная точка $x\in X$, что $fx=x$.*

Эта теорема обобщает известную теорему С. Банаха [3] о неподвижной точке.

Замечание 1. *Пусть (X,ρ_τ) – τ-метрическое пространство. Если $\tau=\aleph_0$, то существует обычная метрика ρ на X, порождающая ту же топологию $T_{\aleph_0}$, порожденную $\aleph_0$– метрикой $\rho_{\aleph_0}$.*

Топологические и равномерные пространства, топологии и равномерности которых порождены некоторыми τ-метриками, называются **τ-метризуемыми.**

В силу замечания 1 $\aleph_0$-метризуемые топологические и равномерные пространства совпадают с метризуемыми топологическими пространствами соответственно.

Теорема 3. *Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ является τ-метризуемым тогда и только тогда, когда равномерность $\mathcal{U}$ имеет вес $w(\mathcal{U})\leq\tau$.*

Из этой теоремы при $\tau=\aleph_0$ следует известная теорема А. Вейля [4] о метризуемости равномерных пространств.

Из теоремы 3 следует широта класса τ-метрических пространств: топология всякого тихоновского пространства порождается некоторой τ-метрикой при некотором кардинале τ.

Теорема 4. Тихоновское пространство (X,T) является τ–метризуемым, тогда и только тогда, когда в (X,T) существует измельчающая система ϑ открытых покрытий, распадающаяся на τ штук нормальных последовательностей открытых покрытий, где $\tau=|A|$.

При $\tau=\aleph_0$ получим критерий метризуемости, близкий к теореме П. С. Александрова и П. Урысона [5] о метризуемости пространств.

Определение 3. Топологическое пространство (X,T) называется τ-секвенциальным, если множество $A\subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда со всякой базой фильтра мощности $\leq\tau$, состоящей из подмножеств множества A, оно содержит все ее пределы.

При $\tau=\aleph_0$ получим определение секвенциальных пространств.

Теорема 5. *τ-секвенциальные пространства и только они являются образами τ–метрических пространств при факторных отображениях.*

С учетом замечания 1 при $\tau=\aleph_0$ получим характеристику секвенциальных пространств как факторных образов метрических пространств, полученную С. П. Франклином [6].

Определение 4. *Топологическое пространство (X,T) называется* ***сильно τ–перистым*** *(соответственно* ***сильно τ-квазиперистым****), если существует система ϑ открытых покрытий, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. Для любых покрытий $\alpha,\beta\in\vartheta$ существует такое покрытие $\gamma\in\vartheta$, что покрытие ϑ звездно вписано в покрытие $\alpha\wedge\beta$.
2. $|\vartheta|\leq\tau$.
3. $\cap\{\alpha(x):\ \alpha\in\vartheta\}=K_x$ – компактно (соответственно счетно компактно) для любого $x\in X$.
4. Система $\{\alpha(K_x):\ \alpha\in\vartheta\}$ является фундаментальной системой окрестностей компакта (соответственно счетно компакта) K_x для каждого $x\in X$.

Если $\tau = \aleph_0$, то сильно τ-перистые пространства совпадают с перистыми паракомпактными пространствами, а сильно τ-квазиперистые пространства совпадают с M–пространствами [7].

Теорема 6. *Сильно τ-перистые (соответственно τ-квазиперистые) пространства, и только они отображаются на τ-метрические пространства посредством совершенных (соответственно квазисовершенных) отображений.*

В работах Б.А. Пасынкова [8] и М.М. Чобана [9] введены и исследованы классы почти метризуемых топологических групп, а в нашей работе [7] введены и изучены классы почти τ-метризуемых и проективно τ-метризуемых топологических групп. Некоторые результаты, полученные в классах почти метризуемых и проективно метризуемых групп, перенесены на классы почти τ-метризуемых и проективно τ-метризуемых топологических групп соответственно.

Следующая теорема обобщает классическую теорему Биркгофа [10], Какутани [11] о метризуемости топологических групп.

Теорема 7. *Топологическая группа G является τ-метризуемой тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\chi(G) \leq \tau$.*

Соотношение между метризуемыми и τ-метризуемыми группами дает следующую теорему.

Теорема 8. *τ-метризуемые группы и только они являются пределами проективных спектров длиной τ, составленных из метризуемых топологических групп и непрерывных гомоморфизмов.*

Определение 5 ([12]). Пусть V – окрестность единицы топологической группы G. Система $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ окрестностей единицы $e \in G$ называется квазиинвариантной базой относительно окрестности V, если для каждого $g \in G$ существует такой индекс $\alpha \in A$, что $g^{-1} V_\alpha g \subseteq V$.

Топологическая группа G, в которой у каждой окрестности единицы существует квазиинвариантная база мощности $\leq \tau$, называется τ-уравновешенной.

Фильтр F на множестве G, в котором пересечение каждого подсемейства мощности $\leq \tau$ снова является элементом фильтра F, называется τ-центрированным. Всякий τ-центрированный фильтр Коши, относительно левой равномерности топологической группы G называется τ-фильтром Коши. Топологическая группа, в которой сходится каждый τ-фильтр Коши, называется τ-полной топологической группой (в работе [14] такая топологическая группа называется слабо τ–полной).

Теорема 9. *Для топологической группы G следующие условия эквивалентны:*

1. Топологическая группа G является τ-уравновешенной и τ-полной.

2. Топологическая группа G является пределом проективного спектра $S=\{G_\alpha, f_\alpha^\beta, M\}$, составленных из τ-метризуемых топологических групп G_α и непрерывных гомоморфизмов $f_\alpha^\beta, \alpha, \beta \in M$.

3. Топологическая группа G замкнуто и изоморфно вкладывается в произведение $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in M\}$ τ-метризуемых топологических групп $G_\alpha, \alpha \in M$.

Для абелевых топологических групп справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Для абелевых топологических групп следующие условия эквивалентны:*

1. Абелева топологическая группа G является τ-полной.

2. Абелева топологическая группа G является пределом проективного спектра $\{G_\alpha, \pi_\alpha^\beta, M\}$, составленных из абелевых τ–метризуемых групп и непрерывных гомоморфизмов $\pi_\alpha^\beta, \alpha, \beta \in M$.

3. Абелева топологическая группа G замкнуто и изоморфно вкладывается в произведение $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in M\}$ τ-метризуемых абелевых топологических групп.

Отталкиваясь от определений почти метризуемых и проективно метризуемых топологических групп, в работе [13] мы ввели следующие понятия.

Определение 6 ([13]). Топологическая группа G называется почти τ-метризуемой, если в ней существует такое компактное подмножество $B \subseteq G$, что $\chi(B,G) \leq \tau$.

Определение 7 ([13]). Топологическая группа G называется проективно τ-метризуемой, если для любой окрестности единицы группы G существует такой компактный нормальный делитель H группы G, что $\chi(H,G) \leq \tau$.

Всякая τ-метризуемая топологическая группа является проективно τ-метризуемой, а всякая проективно τ-метризуемая топологическая группа является почти τ-метризуемой. Обратное, вообще говоря, неверно.

Предложение 1. Всякая почти τ-метризуемая группа является τ-полной.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 11. *Для топологической группы G следующие условия эквивалентны:*

1. Топологическая группа G является проективно τ–метризуемой.

2. Топологическая группа G является пределом проективного спектра $S=\{G_\alpha, f_\alpha^\beta, M\}$, составленных из τ–метризуемых топологических групп G_α и открытых и совершенных гомоморфизмов $f_\alpha^\beta, \alpha,\beta \in M$.

При $\tau = \aleph_0$ следует теорема М.М. Чобана [9].

Предложение 2. Для фактор-пространства *G/H* топологической группы *G* по подгруппе *H* следующие требования равносильны:

а) быть τ-метризуемым; б) обладать характером $\leq \tau$.

При $\tau = \aleph_0$ следует предложение 1 из [8].

Теорема 12. *Следующие условия эквивалентны:*

1. Топологическая группа G является почти τ-метризуемой.

2. Топологическая группа G обладает компактной подгруппой H с характером $\chi(H,G)\leq\tau$, фактор-пространство G/H по которой τ-метризуемо, а естественное отображение $f:G\to G/H$ открыто и совершенно.

3. Топологическая группа G в любой окрестности своей единицы содержит компактные подмножества H_α с характером $\chi(H_\alpha,G)\leq\tau$, фактор-пространства G/H_α по которым метризуемы, а естественные отображения $f_\alpha:G\to G/H_\alpha$ открыты и совершенны.

4. Топологическая группа G является пределом проективного спектра $S=\{G_\alpha, f_\alpha^\beta, M\}$, составленных из τ-метризуемых пространств $G_\alpha=G/H_\alpha$ и открытых и совершенных проекций $f_\alpha^\beta, \alpha,\beta \in M$.

5. Топологическая группа G является равномерно τ–перистой относительно левой равномерности ([9]).

При $\tau = \aleph_0$ отсюда следует теорема 1 Б.А. Пасынкова [8].

Литература

1. *Freshet M.* Sur quelques points du calcul fonctionnel / M. Freshet // Rend. del Girc. Mat. di Palermo. 1906, 22. P. 1–74.
2. *Антоновский М.Я.* Очерки теории топологических полуполей / М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. С. 185–218.
3. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrates / S. Banach // Fund. Math. 1922, 3. P. 133–181.
4. *Weil A*. Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale / A. Weil. Paris, 1938.
5. *Aleksandroff P.S.* Une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D). / P.S. Aleksandroff, P.S. Uryson // C.R. Acad. Sci. Paris, 1923, 177. P. 1274–1276.
6. *Franklin S.P.* Spaces in which sequences suffice / S.P. Franklin // Fund. Math. 1965, 57. P. 107–115.
7. *Morita K.* Products of normal spaces with metric spaces / K. Morita // Math. Ann. 1964, 154. P. 365–382.
8. *Пасынков Б.А.* О почти метризуемых группах / Б.А. Пасынков // Докл. АН СССР, 1965. Т. 161. № 2. С. 281–284.
9. *Чобан М.М.* Топологическое строение подмножеств топологических групп и их факторпространств / М.М. Чобан // В сб. «Топологические структуры и алгебраические системы». Кишинев: Штиинца, 1977. С. 117–163.
10. *Birkhoff G.* A note on topological groups [Текст] / G. Birkhoff // Comp. Math. 1936, 3. P. 427–430.
11. *Kakutani S.* Über die Metrisation der topologischen Gruppen / S. Kakutani // Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1936, 12. P. 82–84.
12. *Архангельский А.В*. Классы топологических групп / А.В. Архангельский // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. С. 127–146.
13. *Борубаев А.А*. О слабой полноте топологических групп / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев // Tartu Ül. Toimetised. 1992, 940. С. 95–100.
14. *Борубаев А.А.* Равномерная топология / А.А. Борубаев. Бишкек: Илим, 2013.