УДК 517.97

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ПОДВИЖНОГО ТОЧЕЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева

Исследована задача оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда распространение тепла происходят под действием точечного подвижного источника. При этом функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления. Найдены условия оптимальности подвижного точечного управления и условия однозначной разрешимости основной и сопряженной краевых задач управляемого процесса..

Ключевые слова: функционал; оптимальное управление; условия оптимальности; краевая задача; слабо обобщенное решение.

THE OPTIMALITY CONDITIONS OF THE PROBLEM OF MOVABLE POINT CONTROL OF HEAT PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Kerimbekov, A.T. Ermekbaeva

It was investigated the problem of optimal control of heat processes, described by Fredholm integro-differential equations when heat conduction occur under movable point control. Wherein the function of external influence nonlinearly depends on control. The conditions of optimality of movable point control and conditions of unique solvability of the main and conjugate boundary problems of controlled process were found.

Keywords: functional; optimal control; optimality conditions; boundary problem; weak generalized solution.

1. Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления

Рассмотрим задачу минимизации обобщенного квадратичного функционала

$$I\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u(t)\right],\quad x\in(0,1),\ 0<t\le T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,1), \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=0,\quad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0,\quad 0<t\le T, \tag{4}$$

где $K(t,\tau)$ – заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{5}$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ – заданные функции; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ – заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\quad \forall t\in(0,T); \tag{6}$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $x_0(t)$ – заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1; λ – параметр; T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$; $H(Y)$; – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Предполагая, что краевая задача (2)–(6) при каждом фиксированном управлении $u(t) \in H(0,T)$ имеет единственное слабо обобщенное решение, вычислим приращение функционала (1). Управление $u(t)+\Delta u(t) \in H(0,T)$, где $\Delta u(t)$ – приращение, определяет однозначно функцию $\nu(t,x)+\Delta\nu(t,x) \in H(Q)$, где $\Delta\nu(t,x)$ – приращение, соответствующее приращению $\Delta u(t)$. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\Delta I(u) = -\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \delta(x-x_0(t))\omega(t,x)dx\left[f(t,u+\Delta u)-f(t,u)\right]dt + \int_0^T \beta\left[p^2(t,u+\Delta u)-p^2(t,u)\right]dt + \right.$$

$$+\int_0^1 \Delta\nu^2(T,x)dx = -\int_0^T \Delta\Pi(\cdot,u)dt + \int_0^1 \Delta\nu^2(T,x)dx, \quad (7)$$

где

$$\Pi(\cdot,u) = \int_0^1 \delta(x-x_0(t))\omega(t,x)dx \cdot f(t,u(t)) - \beta p^2\left[t,u(t)\right] = \omega(t,x_0(t))f\left[t,u(t)\right] - \beta p^2\left[t,u(t)\right], \quad (8)$$

а $\omega(t,x) \in H(Q)$ является единственным слабо обобщенным решением сопряженной краевой задачи, соответствующим управлению $u(t) \in H(0,T)$:

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t < T, \quad (9)$$

$$\omega(T,x) = -2\left[\nu(T,x) - \xi(x)\right], \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \ \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \quad 0 \le t < T. \quad (11)$$

Сформулируем принцип максимума: для того чтобы в задаче оптимизации (1)–(6) управление $u^0(t) \in H(0,T)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\Pi\left(t,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u^0(t)\right) \quad (=) \quad \sup_{u\in Z}\Pi\left(t,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u\right),$$

где Z – множество допустимых значений функции $u(t)$ в каждой точке $t \in [0,T]$, выполнялось почти всюду на отрезке $[0,T]$.

Поскольку в (7) слагаемое $\int_0^1 \Delta\nu^2(T,x)dx$ принимает неотрицательные значения, то нестрогое доказательство принципа максимума следует из неравенства

$$\Delta\Pi\left(t,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t)\right) = \Pi\left(t,\cdots,u(t)+\Delta u(t)\right) - \Pi\left(t,\cdots,u(t)\right) \le 0.$$

Строгое доказательство проводится по схеме, предложенной проф. А.И. Егоровым [1]. Поскольку доказательство аналогично, то здесь приводить его не будем.

Согласно (8), как следствие принципа максимума получим следующие соотношения:

$$\Pi_u(\cdot,u) = \omega(t,x_0(t))f_u\left[t,u(t)\right] - 2\beta p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right] = 0; \quad (12)$$

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \omega(t,x_0(t))f_{uu}\left[t,u(t)\right] - 2\beta\left(p^2\left[t,u(t)\right] + p\left[t,u(t)\right]p_{uu}\left[t,u(t)\right]\right) < 0, \quad (13)$$

которые в совокупности называются *условиями оптимальности.*

В условиях оптимальности содержится решение сопряженной краевой задачи $\omega(t,x)$, что затрудняет проверку условия (13). Согласно (12), исключив $\omega(t,x)$ из (13), преобразуем его к виду

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0. \quad (14)$$

Отсюда видно, что заданные функции $f(t,u(t))$ и $p(t,u(t))$ должны иметь производные второго порядка (почти всюду или обобщенные). Это условие ограничивает класс функций внешних воздействий, т. е. задача оптимального управления имеет решение лишь в классе пар функций $\{f(t,u(t)),\, p(t,u(t))\}$, удовлетворяющих условию (14). Далее будем считать, что это условие выполнено для любого управления $u(t)\in H(0,T)$, т.е. оно выполняется и для оптимального управления. Поэтому оптимальное управление можно находить исходя только из соотношения

$$2\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=\omega\big(t,x_0(t)\big). \tag{15}$$

2. Слабо обобщенное решение основной краевой задачи. Излагается процедура построения слабо обобщенного решения краевой задачи (2)–(6).

Решение ищем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x), \tag{16}$$

где $z_n(x)$ является решением краевой задачи

$$z_n''+\lambda_n^2 z_n(x)=0. \qquad z_n'(0)=0,\ z_n'(1)+\alpha z_n(1)=0$$

и имеет вид

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,\quad n\in 1,2,3,\ldots,$$

причем система собственных функций $\{z_n(x)\}$ образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, числа λ_n, называемые собственными значениями, являются положительными корнями трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$, и удовлетворяют условиям

$$(n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n=1,2,3,...,\qquad \lambda_n\le\lambda_{n+1},\qquad \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty; \tag{17}$$

Будем пользоваться разложениями [2]:

$$\delta(x-x_0(t))=\sum_{n=1}^{\infty}z_n(x_0(t))z_n(x),\ z_n(x_0(t))=\int_0^1\delta(x-x_0(t))z_n(x)dx,\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n z_n(x),\ \psi_n=\int_0^1\psi(x)z_n(x)dx.$$

Подставляя разложение (16) в уравнение (2), получим равенство:

$$v_n'(t)+\lambda_n^2 v_n(t)=\lambda\int_0^T K(t,\tau)v_n(\tau)d\tau+z_n(x_0(t))f(t,u(t)). \tag{18}$$

Рассматривая это уравнение совместно с начальным условием

$$v_n(0)=\psi_n \qquad n=1,2,3,\ldots, \tag{19}$$

находим $v_n(t)$ как решение задачи Коши (18)–(19) по формуле

$$v_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(\lambda\int_0^T K(t,s)v_n(s)ds+z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]\right)d\tau. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что, если коэффициенты Фурье $v_n(t)$ удовлетворяют линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода (20), то функция (16) является решением краевой задачи (2)–(6). Таким образом, построенную функцию (16) назовем *слабо обобщенным решением* краевой задачи (2)–(6).

Интегральное уравнение (20) перепишем в виде

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \tag{21}$$

где ядро

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau, \tag{22}$$

свободный член

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau. \tag{23}$$

Решение уравнения (21) находим по формуле [3]

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{24}$$

где резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,...$, определяется по формуле

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\ n=1,2,3,\dots, \tag{25}$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ удовлетворяют соотношениям

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,\ i=1,2,3,...,\ K_{n,1}(t,s)=K_n(t,s),\ i=1,2,3,\dots. \tag{26}$$

Непосредственным вычислением установлена следующая оценка:

$$|K_{n,i}(t,s)|^2\le\frac{(K_0T)^{i-1}}{(2\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta,\ i=1,2,3,\dots. \tag{27}$$

Ряд (25) сходится при значениях параметра λ, удовлетворяющих оценке $|\lambda|<\dfrac{\lambda_n}{\sqrt{K_0T}}$,

из которой следует, что радиус сходимости ряда Неймана увеличивается с ростом индекса $n=1,2,3,\dots$, коэффициента Фурье. Нетрудно видеть, что ряд Неймана сходится для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda|<\frac{\sqrt{2}\lambda_1}{\sqrt{K_0T}} \tag{28}$$

при любом $n=1,2,3,\dots$, и резольвента является непрерывной функцией по всем аргументам. Установлены следующие оценки:

$$|R_n(t,s,\lambda)|\le\frac{\sqrt{\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta}}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}},\quad \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\le\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}, \tag{29}$$

которые используются в дальнейшем. Решение (24) перепишем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\int_0^T\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)z_n(x_0(\tau))f(\tau,u(\tau))d\eta\right\}z_n(x), \tag{30}$$

где

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 t}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]; \tag{31}$$

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t<\tau\le T.\end{cases} \tag{32}$$

Заметим, что функция $\varepsilon_n\left(t,\tau,\lambda\right)$ на линии $t=\tau$ терпит разрыв со скачком равным 1.

Лемма 1. Слабо обобщенное решение $v(t,x)$ краевой задачи (2)-(5) является элементом гильбертова пространства квадратично суммируемых функций *H*(*Q*), т. е. $v\left(t,x\right)\in H\left(Q\right)$.

Доказательство. Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, непосредственным вычислением, имеем следующее неравенство

$$\int_0^T\int_0^1 v^2(t,x)dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2(t)dt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 t}+\lambda\int_0^T R_n\left(t,s,\lambda\right)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n\left(t,\tau,\lambda\right)z_n\left(x_0(\tau)\right)f\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]d\tau\right)^2dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}2\left\{\psi_n^2 2\left[e^{-2\lambda_n^2 t}+\lambda^2\int_0^T R_n^2\left(t,s,\lambda\right)ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n\left(t,\tau,\lambda\right)z_n\left(x_0(\tau)\right)d\tau\int_0^T f^2\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]d\tau\right\}dt,$$

из которого следует утверждение леммы.

3. Слабо обобщенное решение сопряженной краевой задачи

Теперь изложим процедуру построения решения сопряженной краевой задачи (9)–(11). Решение ищем в виде

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x),\qquad \omega_n(t)=\int_0^1\omega(t,x)z_n(x)dx. \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что функция (33) является решением, если коэффициент Фурье $\omega_n(t)$ при каждом фиксированном *n*=1,2,3,..., определяется из условий:

$$\omega_n'\left(t\right)-\lambda_n^2\omega_n\left(t\right)=-\lambda\int_0^T K\left(\tau,t\right)\omega_n\left(\tau\right)d\tau,\ \ \omega_n'(T)=-2\left(v_n(T)-\xi_n\right),\ \ n=1,2,3,...,$$

$v_n(T)$ – коэффициенты Фурье функции $v(t,x)$, вычисленные в точке $t=T$.

Решение этой задачи Коши можно находить как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода вида

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n\left(s,t\right)\omega_n(s)ds-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}\left[v_n(T)-\xi_n\right], \tag{34}$$

где ядро

$$B_n\left(s,t\right)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}K\left(s,\tau\right)d\tau,\ \ B_{n,1}\left(s,t\right)=B_n\left(s,t\right),$$

а повторные ядра $B_{n,i}\left(s,t\right)$ определяются из равенств

$$B_{n,i+1}\left(s,t\right)=\int_0^T B_n\left(\eta,t\right)B_{n,i}\left(s,\eta\right)d\eta,\ \ i=1,2,3,...,$$

и удовлетворяют оценкам

$$\left|B_{n,i}\left(s,t\right)\right|^2\le\frac{\left(K_0T\right)^{i-1}}{\left(2\lambda_n^2\right)^i}\int_0^T K^2\left(s,\tau\right)d\tau,\qquad i=1,2,3,...$$

Решение линейного неоднородного интегрального уравнения (34) находим по формуле [2]:

$$\omega_n(t)=-2\left\{e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T Q_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right\}\left[v_n(t)-\xi_n\right], \tag{35}$$

где

$$Q_n\left(s,t,\lambda\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}\left(s,t\right)\ \text{– резольвента ядра}\ B_n\left(s,t\right).$$

Резольвента удовлетворяет оценке

$$\int_0^T Q_n^2(s,t,\lambda)ds \le \int_0^T\int_0^T K^2(s,\tau)dsd\tau \frac{1}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)} = \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)}. \quad (36)$$

С учетом равенства

$$\nu_n(T)-\xi_n = -h_n + \int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda) z_n(x_0) f\left[\tau, u(\tau)\right]d\tau, \quad (37)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right], \quad (38)$$

решение сопряженной краевой задачи находим по формуле

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[-h_n + \int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau)) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]G_n(T,t,\lambda)z_n(x), \quad (39)$$

где

$$G_n(T,t,\lambda) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T Q_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds.$$

Непосредственным вычислением можно показать, что $\omega(t,x)\in H(Q)$.

После того, как были найдены решения основной и сопряженной краевых задач, условие оптимальности (15) позволяет находить оптимальное управление. Однако это требует дополнительных исследований.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Наука, 1975. 304 с.