

УДК 517.968.74

**ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВА
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ФУНКЦИОНАЛОМ**

С. Искандаров, Г.Т. Халилова

Устанавливаются достаточные условия оценки снизу на полуоси и стремления к бесконечности решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка с функционалом.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; оценка снизу; стремление к бесконечности; многообразии начальных данных; влияние интегральных возмущений.

**ABOUT LOWER ESTIMATES OF SOLUTIONS OF VOLTERRA
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER WITH A FUNCTIONAL**

S. Iskandarov, G.T. Khalilova

The paper establishes the sufficient conditions for lower estimates on the half and the tend to infinity of solutions of linear Volterra integro-differential equation of first order with the functional.

Keywords: integro-differential equation; the lower estimates; tend to infinity; a variety of initial data; the impact of integrated perturbations.

Все фигурирующие ниже функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение; ФДУ – функционально – ДУ. В статье решается следующая

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия для оценки снизу на бесконечном полуинтервале J и стремления к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ решений линейного неоднородного ИДУ первого порядка типа Вольтерра:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t) + F(t; x), \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

при выполнении условия

$$xF(t; x) \geq 0. \quad (F)$$

Эта задача в такой общей постановке решается впервые. Отметим, что аналогичная задача решена в [1] для линейного однородного ИДУ вида (1) $f(t) \equiv 0$, $F(t; x) \equiv 0$, а в [2] для линейного неоднородного ИДУ вида (1) $F(t; x) \equiv 0$. В настоящей работе некоторые результаты из [2, 3] переносятся на случай ИДУ (1) и развивается метод цитированных работ, а именно метод весовых и срезывающих функций [3]. При этом выявляется влияние на ограниченность решений простейшего линейного ДУ:

$$x'(t) = f(t), \quad t \geq t_0 \quad (1_1)$$

и на ограниченность решений ФДУ

$$x'(t) = F(t; x), \quad t \geq t_0, \quad (1_2)$$

т.е. сформулированная задача решается в случаях, когда все решения ДУ (1₁) и ФДУ (1₂) могут быть ограниченными на ОА J .

Отметим также, что оценки снизу решений близких к (1) уравнений проведены в работах [4–7].

Речь идет о решениях $x(t) \in C^1(J, R)$ ИДУ (1) с любым начальным данным $x(t_0) \in R$. Предполагается, что такое решение ИДУ (1) существует.

Пусть [1, 2]: $0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau), \quad f(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t);$$

(K), (f) $\psi_i(t)$ ($i = 1..n$) – некоторые срезывающие функции;

$R_i(t, \tau) K_i(t, \tau) (\psi_i(t) \psi_i(\tau))^{-1}$, $E_i(t) \equiv \varphi(t) f_i(t) (\psi_i(t))^{-1}$ ($i = 1..n$); $c_i(t)$ $i = 1..n$ – некоторые функции.

Далее поступаем аналогично как в [2, 3]. Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (1) умножаем на $\varphi(t) x(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (f), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t, \tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ с применением лемм 1.4, 1.5 [8], а также применяем следующее преобразование с выделением полного квадрата и с условием $a(t) \neq 0$:

$$\int_{t_0}^t [a(s)\varphi(s)(x(s))^2 - 2f_0(s)\varphi(s)x(s)]ds = \int_{t_0}^t \varphi(s)a(s)[(x(s))^2 - 2f_0(s)(a(s))^{-1}x(s) + (f_0(s))^2(a(s))^{-2} - (f_0(s))^2(a(s))^{-2}]ds =$$

$$= \int_{t_0}^t \varphi(s)a(s)[x(s) - f_0(s)(a(s))^{-1}]^2 ds - \int_{t_0}^t \varphi(s)(f_0(s))^2(a(s))^{-1} ds.$$

Тогда получаем тождество:

$$\varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \varphi(s)a(s)[x(s) - f_0(s)(a(s))^{-1}]^2 ds + \int_{t_0}^t \Delta_1(s)\varphi(s)(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^n \{R_i(t, t_0)(X_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)X_i(t, t_0) +$$

$$+ c_i(t) - \int_{t_0}^t [R_i'(s, t_0)(X_i(s, t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s, t_0) + c_i'(s)]ds + \int_{t_0}^t R_{i\tau}'(t, \tau)(X_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{i\tau\tau}''(s, \tau)(X_i(s, \tau))^2 d\tau ds\} \equiv$$

$$\equiv c_0 - \int_{t_0}^t \varphi(s)(f_0(s))^2(a(s))^{-1} ds + 2 \int_{t_0}^t \varphi(s)x(s)F(s; x)ds, \quad (2)$$

где $\Delta_1(t) \equiv a(t) - \varphi'(t)(\varphi(t))^{-1}$, $X_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(\eta)x(\eta)d\eta$ ($i = 1..n$), $c_0 = \varphi(t_0)(x(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0)$.

Введем обозначение: $c_* = \varphi(t_0)(x(t_0))^2 - \sum_{i=1}^n |c_i(t_0)| - \int_{t_0}^{\infty} \varphi(s)(f_0(s))^2 |a(s)|^{-1} ds$.

Переходя от тождества (2) к интегральному неравенству, применяя теорему [9, с. 187], аналогично теореме 1 [1] доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть 1) $\varphi(t) > 0$ выполняются условия (F), (K), (f);

2) $a(t) < 0$, $\Delta_1(t) \leq 0$; 3) $R_i(t, t_0) \leq 0$, $R_i'(t, t_0) \geq 0$, существуют функции $c_i(t)$ ($i = 1..n$) такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq R_i^{(k)}(t, t_0) c_i^{(k)}(t)$ ($i = 1..n$; $k = 1, 0$);

4) $R_{i\tau}'(t, \tau) \leq 0$, $R_{i\tau\tau}''(t, \tau) \geq 0$ ($i = 1..n$); 5) $f_{0*} = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(s)(f_0(s))^2 |a(s)|^{-1} ds < \infty$.

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), удовлетворяющего условию $c_* > 0$, справедлива следующая оценка снизу:

$$|x(t)| \geq \sqrt{c_*} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t |\Delta_1(s)| ds\right). \quad (3)$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются все условия теоремы 1 и $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t |\Delta_1(s)| ds\right) = \infty$, то все

решения ИДУ (1), для которых $c_* > 0$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай, когда

$$0 \geq f_0(t) = f_{01}(t)f_{02}(t), \quad (f_0)$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(s)(f_{01}(s))^2 ds \equiv f_{0**} < \infty. \quad (f_{01})$$

Тогда справедливо соотношение:

$$2 \int_{t_0}^t f_0(s)\varphi(s)x(s)ds = -2 \int_{t_0}^t \varphi(s)|f_{01}(s)f_{02}(s)|x(s)ds \geq - \int_{t_0}^t \varphi(s)(f_{01}(s))^2 ds - \int_{t_0}^t \varphi(s)(f_{02}(s))^2(x(s))^2 ds. \quad (4)$$

С учетом преобразования (4), вместо тождества (2) имеем неравенство:

$$\varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta_2(s)\varphi(s)(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^n \{R_i(t, t_0)(X_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)X_i(t, t_0) + c_i(t) -$$

$$-\int_{t_0}^t [R'_i(s, t_0)(X_i(t, t_0))^2 - 2E'_i(s)X_i(s, t_0) + c'_i(s)]ds + \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau)(X_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R''_{i\sigma\tau}(s, \tau)(X_i(s, \tau))^2 d\tau ds \geq c_{**}, \quad (5)$$

где $\Delta_2(t) \equiv 2a(t) + (f_{02}(t))^2 - \varphi'(t)(\varphi(t))^{-1}$, $c_{**} = c_0 - \int_{t_0}^{\infty} \varphi(s)(f_{01}(s))^2 ds = c_0 - f_{0**}$.

Исходя из неравенства (5), аналогично теореме 1 устанавливается

ТЕОРЕМА 2. Пусть 1) выполняются условия 1), 3), 4) теоремы 1 и (f_0) , (f_{01}) ; 2) $\Delta_2(t) \leq 0$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), удовлетворяющего условию $c_{**} > 0$, верна следующая оценка снизу:

$$|x(t)| \geq \sqrt{c_{**}} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t |\Delta_2(s)| ds\right). \quad (6)$$

Из теоремы 2 аналогично следствию 1 получается

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются все условия теоремы 2 и $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t |\Delta_2(s)| ds\right) = \infty$, то все

решения ИДУ (1), для которых $c_{**} > 0$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

В теореме 2 может быть $f_0(t) \equiv 0$. Тогда из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Если верны условия 1) с $f_0(t) \equiv 0$, 3), 4) теоремы 1 и $\Delta(t) \equiv 2a(t) - \varphi'(t)(\varphi(t))^{-1} \leq 0$, то все решения ИДУ (1), для которых $c_0 = \varphi(t_0)(x(t_0))^2 - \sum_{i=1}^n |c_i(t_0)| > 0$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

Из теорем 1, 2 также получается

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть для ИДУ (1) выполняются условие (F) и

$$K(t, \tau) = b(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(t, \tau) Q_i(t) Q_i(\tau), \quad b(t) > 0, \quad \alpha_i > 0 \quad (i=1..n),$$

$$f(t) = b(t) \sum_{i=1}^n \beta_i P_i(t, t_0) Q_i(t), \quad \beta_i > 0 \quad (i=1..n), \quad 2a(t) + b'(t)(b(t))^{-1} \leq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (b(t))^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t |2a(s) + b'(s)(b(s))^{-1}| ds\right) = \infty,$$

$$P_i(t, t_0) \leq 0, \quad P'_i(t, t_0) \geq 0, \quad P''_{i\tau}(t, \tau) \leq 0, \quad P'_{i\tau}(t, \tau) \geq 0 \quad (i=1..n).$$

Тогда все решения такого ИДУ, для которых

$$(b(t_0))^{-1}(x(t_0))^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i P_i(t_0, t_0) > 0, \quad \delta_i \geq \beta_i^2 \alpha_i^{-1} \quad (i=1..n),$$

стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$.

В этом случае $\varphi(t) \equiv (b(t))^{-1}$, $\psi_i(t) \equiv Q_i(t)$ ($i=1..n$), $\Delta(t) \equiv 2a(t) + b'(t)(b(t))^{-1}$, $c_i(t) \equiv \delta_i P_i(t, t_0)$ ($i=1..n$) и из теоремы 2 вытекает утверждение этого следствия.

ПРИМЕР 1. Для ИДУ

$$x'(t) - a_0 Q(t)x(t) - K_0 \int_0^t Q(\tau)x(\tau) d\tau = q_0 Q(t), \quad t \geq 0, \quad (1_*)$$

где постоянные $a_0 > 0$, $K_0 > 0$; $q_0 \neq 0$ функция $Q(t) > 0$, $\int_0^{\infty} Q(t) dt = \infty$, выполняются все условия следствия 4,

здесь $a(t) \equiv -a_0 Q(t)$, $b(t) \equiv 1$, $n = 1$, $P_0(t, \tau) \equiv -1$, $Q_1(t) \equiv Q(t)$, $F(t; x) \equiv 0$ и все его решения, для которых $(x(0))^2 - \delta > 0$, $\delta \geq \frac{q_0^2}{K_0}$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что ИДУ (1*) имеет общее решение

$$x(t) = \left[\lambda_1 \int_0^t Q(s) ds - \lambda_2 \int_0^t Q(s) ds \right] e^{-\frac{q_0}{\lambda_1} \int_0^t Q(s) ds} \quad (c - \text{произвольная постоянная}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f_0(t) \equiv 0$ и выполняются условия следствия 3. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), для которых $c_0 > 0$, справедлива оценка снизу:

$$|x(t)| \geq \sqrt{c_0} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t |\Delta(s)| ds\right). \quad (7)$$

Пусть

$$R_i(t, t_0) = A_i(t) + B_i(t) (i = 1..n). \quad (R)$$

В силу условия (R) с учетом $\Delta_2(t) \equiv \Delta(t)$, $c_{**} = c_0$ вместо неравенства (5) получаем тождество:

$$\begin{aligned} \varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta(s)\varphi(s)(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^n \{A_i(t)(X_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t A_i'(s)(X_i(s, t_0))^2 ds + B_i(t)(X_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)X_i(t, t_0) + c_i(t) - \\ - \int_{t_0}^t [B_i'(s)(X_i(s, t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s, t_0) + c_i'(s)] ds + \int_{t_0}^t R_{i\tau}'(t, \tau)(X_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{i\tau\tau}''(s, \tau)(X_i(s, \tau))^2 d\tau ds \geq c_0. \end{aligned} \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть 1) $\varphi(t) > 0$, выполняются условия 1) с $f_0(t) \equiv 0$, 4) теоремы 1 и условие (R); 2) $\Delta(t) \leq 0$; 3) $A_i(t) \leq 0$, $A_i'(t) \geq 0$; 4) $B_i(t) \leq 0$, $B_i'(t) \geq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ ($i = 1..n$; $k = 0, 1$); 5) $\psi_j(t) \neq 0$ ($1 \leq j \leq n$). Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), удовлетворяющего условию $c_0 > 0$, справедлива оценка снизу:

$$|x(t)| \geq \sqrt{c_0} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} D(t), \quad (9)$$

где $D(t) \equiv \left[\exp\left(\int_{t_0}^t |\Delta(s)| ds\right) + \left| A_j(t) \right| (G_j(t, t_0))^2 + \int_{t_0}^t A_j'(s) (G_j(s, t_0))^2 ds + \int_{t_0}^t \left| R_{j\tau}'(t, \tau) \right| (G_j(t, \tau))^2 d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{j\tau\tau}''(s, \tau) (G_j(s, \tau))^2 d\tau ds \right]^{\frac{1}{2}}$,

$$G_j(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t |\psi_j(\eta)| (\varphi(\eta))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\eta} |\Delta(s)| ds\right) d\eta \quad (1 \leq j \leq n).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 [1]. Аналогично теоремам 1, 2 из (8) вытекает справедливость оценки (7), из которой следует, что $x(t) \neq 0$. Тогда, используя условие 5) и оценку (7), имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (X_j(t, \tau))^2 &\equiv \left(\int_{\tau}^t \psi_j(\eta) x(\eta) d\eta \right)^2 = \left(\int_{\tau}^t |\psi_j(\eta) x(\eta)| d\eta \right)^2 \geq \\ &\geq \left(\int_{\tau}^t |\psi_j(\eta)| (\varphi(\eta))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\eta} |\Delta(s)| ds\right) c_0 \equiv (G_j(t, \tau))^2 c_0 \right)^2 \quad (1 \leq j \leq n). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (10) из тождества (8) вытекает справедливость оценки (9).

СЛЕДСТВИЕ 5. Если выполняются все условия теоремы 3 и $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} D(t) = \infty$, то все решения ИДУ (1), для которых $c_0 > 0$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Это следует из (9).

ПРИМЕР 2. ИДУ

$$x'(t) - 2 \int_0^t \frac{x(\tau)}{t - \tau + 1} d\tau = \frac{1}{(t+1)^2} + F(t; x), \quad t \geq 0, \quad (*)$$

где $F(t; x) \equiv x \sin^2 \left\{ e^t (\cos t)^{\frac{1}{5}} x \left(\frac{t}{3} \right) \int_0^t x^3(\tau) d\tau \right\}$, $t \geq 0$, удовлетворяет всем условиям следствия 5 при $\varphi(t) \equiv 1$,

$$n = 1, \psi_1(t) \equiv 1, \text{ здесь } t_0 = 0, A_1(t) \equiv -\frac{1}{t+1}, B_1(t) \equiv -\frac{1}{t+1}, E_1(t) \equiv -\frac{1}{(t+1)^2}, c_1(t) \equiv -\frac{4}{t+1}.$$

Значит, все решения $x(t)$ этого ИДУ, для которых $c_0 = (x(0))^2 - 4 > 0$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Однако все решения $x(t) = c - \frac{1}{t+1}$ (c – произвольная постоянная) ДУ: $x'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$, $t \geq 0$, соответствующего приведенному ИДУ, ограничены на полуоси $R_+ = [0, \infty]$.

Пример 2 показывает, что в условиях теоремы 3 все решения ДУ (1₀) могут быть ограниченными на J .

ПРИМЕР 3. Для ИДУ (*), где $F(t, x) \equiv x \sin^6(e^{-t}) \cos^4(x(\frac{t}{5}))$, $t \geq 0$, выполняются также все условия следствия 5. При этом все решения ФДУ:

$$x'(t) = x \sin^6(e^{-t}) \cos^4(x(\frac{t}{5})), \quad t \geq 0$$

ограничены на полуоси $t \geq 0$, что следует из оценки $|x(t)| \leq |x(t_0)| \exp(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-6t})$, которая вытекает применением леммы Гронуолла–Беллмана к интегральному неравенству $|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_0^t e^{-6s} |x(s)| ds$, $t \geq 0$, получаемого из этого ФДУ интегрированием и с учетом соотношения: $\sin^6(e^{-t}) \cos^4(x(\frac{t}{5})) \leq e^{-6t}$.

Тем самым, выявлено влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений ДУ (1₁) и ФДУ (1₂).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выполнении условий теорем 1, 2, 3 все решения $x(t)$ ИДУ (1), для которых соответственно выполнены условия $c_* > 0$, $c_{**} > 0$, $c_0 > 0$, не имеют нулей на полуинтервале J , и значит, ИДУ (1) не имеет особенных точек [10, с. 27].

Литература

1. Искандаров С. Оценки снизу решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1508–1512.
2. Искандаров С. Оценки снизу решений линейного неоднородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров, Г.Т. Халилова // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2009. Вып. 41. С. 46–52.
3. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
4. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений: главы нелинейного анализа / М.А. Красносельский. М.: Наука, 1962. 394 с.
5. Burton T.A. Volterra Integral and Differential Equations / T.A. Burton. New York a.o.: Acad.Press, 1983. X+313 p.
6. Смолин Ю.Н. Об оценке снизу решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздываниями / Ю.Н. Смолин // Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1979. С. 183–186.
7. Agarwal R.P. Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications / R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012. 520 p.
8. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис... докт. физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
9. Беккенбах Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман; пер. с англ.; под ред. В.И. Левина. М.: Мир, 1965. 276 с.
10. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений / Я.В. Быков. Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. 328 с.