УДК 517.955

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ, КОГДА МАЛЫЙ ПАРАМЕТР СТРЕМИТСЯ К НУЛЮ

А.Р. Алиева

Приведены результаты, полученные с использованием преобразования асимптотического характера для решения сингулярно-возмущенной задачи Коши в неограниченной области.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенная задача Коши; интегро-дифференциальные уравнения.

THE SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM WHEN THE SMALL PARAMETER TO TENDS TO ZERO

A.R. Alieva

It is given the results obtained using the asymptotic character of the transformation for the solution of the singularly perturbed Cauchy problem in an unbounded domain.

Key words: singularly perturbed Cauchy problem; integro-differential equations.

В статье излагаются результаты, полученные с использованием преобразования асимптотического характера для решения сингулярно-возмущенной задачи Коши в неограниченной области. При этом установлены необходимые и достаточные условия разрешимости исходной и вырожденной задачи с оценкой близости решений в классе непрерывных функций.

Предложенная теория применяется и к задачам более сложной структуры [1–3, 5, 7]. Она также может использоваться и в теории сингулярно-возмущенных обратных задач [4, 6] в неограниченной области, поскольку в предлагаемых преобразованиях исходная задача эквивалентно преобразуется к интегральным условиям второго рода.

Рассматривается задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения вида

$$\varepsilon^2(u_{tx^2}+u_{x^3})-\varepsilon^2 g(t)uu_x-(u_x+u_t)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}g(t)u^2=f(t,x)+\varepsilon(Ku)(t,x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,x)=\varphi_\varepsilon(x), \forall x\in R, \\ Ku\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,\tau)u(t,\tau)d\tau, t\in[0,T]; \end{cases}$$

$$D=\{(t,x):0\le t\le T, x\in R\}, \tag{2}$$

где $C(D)\in g(t), C^3(R)\ni\varphi_\varepsilon(x), C^{0,3}(D)\ni f(t,x)-$ ограниченные функции, $0\le K(x,\tau)$ – непрерывно в области $D_1=\{(x,\tau):-\infty<x<\infty,-\infty<\tau<\infty\}$, причем

$$\begin{cases} \sup\limits_R\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(x,\tau)|d\tau\le C_0=const, \\ \sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t|g(\nu)|d\nu\le\lambda<1. \end{cases}$$

При этом надо найти функцию $u(x,t)$.

П. 1. Если предположим, что e = 0, то из (1) следует задача:

$$\vartheta_t(t,x)+\vartheta_x(t,x)=-f(t,x) \tag{3}$$

$$\vartheta\,(0,x)=j_0(x), \tag{4}$$

где $C^3(R)\ni\varphi_0(x)$, причем

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(x)-\varphi_0(x)\equiv\psi_\varepsilon(x)\in C^3(R), \\ \left|\psi_{\varepsilon x}^{(i)}(x)\right|''\ \delta(\varepsilon),\forall x\in R,(i=0,1). \end{cases} \tag{5}$$

Решение задачи Коши (3), (4) находим в замкнутом виде:

$$\vartheta(t,x)=\varphi_0(x-t)-\int\limits_0^t f(\nu,x-(t-\nu))d\nu, \tag{6}$$

при этом имеет место:

$$\begin{cases} \vartheta_t(t,x)=-\varphi_{0l}(x-t)-f(t,x)+\int\limits_0^t f_l(\nu,x-(t-\nu))d\nu, \\ \vartheta_x(t,x)=\varphi_{0l}(x-t)-\int\limits_0^t f_l(\nu,x-(t-\nu))d\nu,(l=t-\nu), \\ \vartheta_t(t,x)+\vartheta_x(t,x)=-f(t,x),(см.(3)). \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 1. Задача (3), (4) имеет точное решение по правилу (6) в классе функций $\tilde{C}^{1,3}(D)$: $\|\vartheta\|_{\tilde{C}^{1,3}(D)} = \|\vartheta\|_C + \|\vartheta_t\|_C + \|\vartheta_x\|_C + \|\vartheta_{tx}\|_C + \|\vartheta_{x^2}\|_C + \|\vartheta_{tx^2}\|_C + \|\vartheta_{x^3}\|_C$.

П.2. Чтобы найти решение задачи (1), (2) поступим следующим образом, т.е. решение (1) будем искать в виде

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t,x) = \vartheta(t,x) + \psi_\varepsilon(x) + \xi(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ \psi_\varepsilon(x) \equiv \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_0(x), \\ \xi(0,x) = 0, \forall x \in R, \\ \vartheta(0,x) = \varphi_0(x), \forall x \in R. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда, подставляя (8) и

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t}(t,x) = \vartheta_t(t,x) + \xi_t(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ u_{\varepsilon x}(t,x) = \vartheta_x(t,x) + \psi_{\varepsilon x}(x) + \xi_x(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ u_{\varepsilon tx^2}(t,x) = \vartheta_{tx^2}(t,x) + \xi_{tx^2}(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ u_{\varepsilon x^3}(t,x) = \vartheta_{x^3}(t,x) + \psi_{\varepsilon x^3}(x) + \xi_{x^3}(t,x), \forall (t,x) \in D \end{cases} \tag{9}$$

в (1), получим:

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\xi_{tx^2} + \xi_{x^3}) - \varepsilon^2 g(t)\xi\xi_x - (\xi_x + \xi_t) + \dfrac{\varepsilon}{2} g(t)\xi^2 = \\ = (F_\varepsilon(\xi,\xi_x))(t,x) + Y_\varepsilon(t,x),\ \xi(0,x) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (F_\varepsilon(\xi,\xi_x))(t,x) \equiv \varepsilon(K\xi)(t,x) - \varepsilon g(t)(\vartheta + \psi_\varepsilon)\xi + \\ +\varepsilon^2 g(t)[(\vartheta + \psi_\varepsilon)\xi_x + (\vartheta_x + \psi_{\varepsilon x})\xi], \\ Y_\varepsilon(t,x) \equiv \varepsilon^2 g(t)(\vartheta + \psi_\varepsilon)(\vartheta_x + \psi_{\varepsilon x}) - \\ -\varepsilon^2[\vartheta_{tx^2} + \vartheta_{x^3} + \psi_{\varepsilon x^3}] + \psi_\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2} g(t)(\vartheta + \psi_\varepsilon)^2 + \\ +\varepsilon(K[\vartheta + \psi_\varepsilon])(t,x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, \forall (t,x) \in D. \end{cases} \tag{10}$$

Поэтому решение уравнения (10) строим по правилу:

$$\begin{cases} \xi(t,x) = \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \frac{g(t)}{2} \xi^2(\nu,s)\,ds\,d\nu - \\ -\displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty \frac{1}{\varepsilon^2} e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \Phi_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau\,ds\,d\nu, \\ \Phi_\varepsilon(t,x) \equiv Y_\varepsilon(t,x) + (F_\varepsilon(\xi,\xi_x))(t,x), \end{cases} \tag{11}$$

здесь (11) удовлетворяет уравнению (1) и удовлетворяет условию (2).

Действительно, дифференцируя (11) по совокупности аргументов, находим:

$$\begin{cases} \xi_t(t,x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)} \frac{g(t)}{2} \xi^2(t,s)\,ds - \int_0^t \frac{g(\nu)}{2} \xi^2(\nu, x-t+\nu)\,d\nu + \\ +\dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \frac{g(\nu)}{2} \times \\ \times \xi^2(\nu,s)\,ds\,d\nu - \dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau\,ds + \\ +\dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int_0^t \int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)} \Phi_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau\,d\nu - \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^3} \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \Phi_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau\,ds\,d\nu; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_x(t,x) = \displaystyle\int_0^t \frac{g(\nu)}{2} \xi^2(\nu, x-t+\nu)\,d\nu - \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \frac{g(\nu)}{2} \xi^2(\nu,s)\,ds\,d\nu - \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int_0^t \int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)} \Phi_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau\,d\nu + \\ +\dfrac{1}{\varepsilon^3} \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \Phi_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau\,ds\,d\nu; \\ \xi_t(t,x) + \xi_x(t,x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)} \frac{g(t)}{2} \xi^2(t,s)\,ds - \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)} \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau\,ds. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\xi_{tx} + \xi_{x^2} = \frac{g(t)}{2} \xi^2(t,x) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)} \frac{g(t)}{2} \xi^2(t,s)\,ds - \\ &- \frac{1}{\varepsilon^2} \int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)} \times \\ &\times \int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau\,ds \equiv \frac{g(t)}{2} \xi^2(t,x) - \\ &- \frac{1}{\varepsilon}(\xi_t(t,x) + \xi_x(t,x)) - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau, \\ &\xi_{tx^2}(t,x) + \xi_{x^3}(t,x) = g(t)\xi\xi_x - \frac{1}{\varepsilon}(\xi_{tx}(t,x) + \xi_{x^2}(t,x)) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \Phi_\varepsilon(t,x) - \frac{1}{\varepsilon^3} \int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau \equiv \\ &\equiv g(t)\xi\xi_x - \frac{1}{\varepsilon}\Big[\frac{g(t)}{2} \xi^2(t,x) - \frac{1}{\varepsilon}(\xi_t(t,x) + \xi_x(t,x)) - \\ &- \frac{1}{\varepsilon^3} \int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau\Big] + \frac{1}{\varepsilon^2} \Phi_\varepsilon(t,x) - \\ &- \frac{1}{\varepsilon^3} \int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)} \Phi_\varepsilon(t,\tau)\,d\tau = g(t)\xi\xi_x - \frac{g(t)}{2\varepsilon} \xi^2(t,x) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2}(\xi_t(t,x) + \xi_x(t,x)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Phi_\varepsilon(t,x), \end{aligned} \tag{12}$$

или преобразуя (12), имеем (см. (10)):

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\xi_{tx^2} + \xi_{x^3}) - \varepsilon^2 g(t)\xi\xi_x - (\xi_x + \xi_t) + \dfrac{\varepsilon}{2} g(t)\xi^2 = \Phi_\varepsilon(t,x), \\ \Phi_\varepsilon(t,x) \equiv Y_\varepsilon(t,x) + (F_\varepsilon(\xi,\xi_x))(t,x). \end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

С другой стороны, (11) является интегро-дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому, используя вначале относительно правой части (11), где содержится функция $\xi_\tau(\nu,\tau)$, метод интегрирования по частям, получим:

$$(B_2\xi)(t,x) \equiv -\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}$$

$$\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} g(\nu)(\vartheta(\nu,\tau)+\psi_\varepsilon(\tau))\xi_\tau(\nu,\tau)d\tau ds d\nu =$$

$$= -\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \{-g(\nu)(\vartheta(\nu,s)+\psi_\varepsilon(s))\xi(\nu,s) -$$

$$-\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} g(\nu)[-\frac{1}{\varepsilon}(\vartheta(\nu,\tau)+\psi_\varepsilon(\tau)) +$$

$$+\vartheta_\tau(\nu,\tau)+\psi_{\varepsilon\tau}(\tau)]\xi(\nu,\tau)d\tau\} ds d\nu. \qquad (13)$$

Следовательно, с учетом (13) уравнение (11) эквивалентно преобразуется к интегральному уравнению второго рода:

$$\begin{cases} \xi(t,x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \dfrac{g(t)\xi^2(\nu,s)}{2} ds d\nu - \\ -\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty \dfrac{1}{\varepsilon^2} e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} Y_\varepsilon(\nu,\tau) d\tau ds d\nu - \\ -\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty \dfrac{1}{\varepsilon^2} e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} \{\varepsilon(K\xi)(\nu,\tau) - \\ -\varepsilon g(\nu)(\vartheta(\nu,\tau)+\psi_\varepsilon(\tau))\xi(\nu,\tau) + \\ +\varepsilon^2 g(\nu)[(\vartheta(\nu,\tau)+\psi_\varepsilon(\tau))\xi_\tau(\nu,\tau) + \\ +(\vartheta_\tau(\nu,\tau)+\psi_{\varepsilon\tau}(\tau))\xi(\nu,\tau)]\} d\tau ds d\nu = \\ = (B_1\xi)(t,x) + (B_2\xi)(t,x) - \\ -\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty \dfrac{1}{\varepsilon^2} e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} Y_\varepsilon(\nu,\tau) d\tau ds d\nu \equiv H\xi, \\ B_1\xi \equiv \int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \dfrac{g(t)\xi^2(\nu,s)}{2} ds d\nu - \\ -\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty \dfrac{1}{\varepsilon^2} e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} [\varepsilon(K\xi)(\nu,\tau) - \\ -\varepsilon g(\nu)(\vartheta(\nu,\tau)+\psi_\varepsilon(\tau))\xi(\nu,\tau) + \varepsilon^2 g(\nu)(\vartheta_\tau(\nu,\tau) + \\ +\psi_{\varepsilon\tau}(\tau))\xi(\nu,\tau)] d\tau ds d\nu. \end{cases} \qquad (14)$$

Если относительно оператора *H* допускаются условия Банаха [4]:

$$\begin{cases} d_H < 1, \\ H: S_{r_1} \to S_{r_1}, [S_{r_1}(0) = \{\xi : |\xi(t,x)| \le r_1, \forall (t,x) \in \\ \in D\}; S_r(\vartheta) = \{\vartheta : |\vartheta(t,x)| \le r, \forall (t,x) \in D\}], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|(H0)(t,x)\|_C \le (1-d_H)r_1 : \\ \|(H\xi)(t,x)\|_C \le \|(Hu)(t,x)-(H0)(t,x)\|_C + \\ +\|(H0)(t,x)\|_C \le d_H r_1 + (1-d_H)r_1 = r_1, \end{cases} \qquad (15)$$

то уравнение (14) разрешимо в $C(D)$, причем

$$\|\xi\|_C \le (1-d_H)^{-1} T \|Y_\varepsilon(t,x)\|_C \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (16)$$

Поэтому решение (14) находим методом Пикара:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = H\xi_n, (n=0,1,...), \\ \|\xi_{n+1}-\xi\|_C \le d_H^{n+1} r_1 \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Лемма 2. При условиях (15), (16) уравнение (14) разрешимо $C(D)$.

Таким образом, мы показали, что непрерывно-ограниченное решение интегрального уравнения (14) есть решение сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2). Следовательно, учитывая (8) и (17) имеем:

$$\|u_\varepsilon(t,x)-\vartheta(t,x)\|_C \le \|\psi_\varepsilon(x)\|_C + \|\xi(t,x)\|_C \le \delta(\varepsilon) +$$

$$+(1-d_H)^{-1} T \|Y_\varepsilon(t,x)\|_C \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (18)$$

Теорема 1. В условиях лемм 1, 2 и (18) близость решения задач (1), (2) и (3), (4) оценима в смысле $C(D)$, когда $\varepsilon \to 0$.

Литература

1. *Бободжанов А.А., Сафронов В.Ф.* Сингулярно-возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами / А.А. Бободжанов, В.Ф. Сафронов // Математические заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 654–664.
2. *Бубнов Б.А.* Общие краевые задачи для уравнения Кортевега де Фриза в неограниченной области / Б.А. Бубнов // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15. Вып. 1. С. 26–31.
3. *Винокуров В.П.* Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра / В.П. Винокуров // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. №10. С. 1732–1744.
4. *Иманалиев М.И.* Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение / М.И. Иманалиев. Фрунзе: Илим, 1977. 348 с.
5. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Обобщенные решения для уравнения Уизема / П.И. Наумкин, И.А. Шишмарев // ДУ. 1992. Т. 28. Вып. 1. С. 121–126.
6. *Омуров Т.Д., Туганбаев М.М.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса / Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев // ИТ и ПМ НАН КР. Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны / Уизем Дж. М.: Мир, 1977. 622 с.