УДК 517.962.2

РАЗРАБОТКА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Ю.В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев

Рассмотрена одномерная обратная задача геоэлектрики с источниками – дельта-функцией Дирака и тета-функцией Хевисайда. Обобщенная обратная задача приведена с использованием метода характеристики и выделения особенностей к обратной задаче на характеристиках. Для последней обратной задачи построено конечно-разностное регуляризованное решение и получена оценка сходимости.

*Ключевые слова***:** геоэлектрика; обратная задача; конечно-разностное регуляризованное решение; сходимость решения.

ГЕОЭЛЕКТРИКАНЫН БИР ЧЕНЕМДҮҮ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИН ЧЕЧҮҮНҮН АКЫРКЫ-АЙЫРМАЛУУ ЖӨНГӨ САЛЫНГАН МЕТОДУН ИШТЕП ЧЫГУУ

Ю.В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев

ГБул макалада Дирактын дельта-функциясы жана Хевисайддын тета-функциясы булактары менен геоэлектриканын бир өлчөмдүү тескери маселеси каралган. Жалпыланган тескери маселе, мүнөздөмө усулун колдонуу жана өзгөчөлүктөрүн белгилөө менен мүнөздөмөдөгү тескери маселеге келтирилген. Акыркы тескери маселе үчүн акыркы-айырмалуу жөнгө салынган чыгаруу жана дал келүүнүн баасы алынган.

Түйүндүү сөздөр: геоэлектрика; тескери маселе; акыркы-айырмалуу; жөнгө салынган чыгаруу; чыгарылыштын дал келүүсү.

DEVELOPMENT OF THE FINITE-DIFFERENCE REGULARIZED METHOD SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF GEOELECTRICS

Yu.V. Anishchenko, A.Dj. Satybaev

The paper considers the one-dimensional inverse problem of geoelectrics with sources, the Dirac delta-function and the Heaviside theta-function. The generalized inverse problem is reduced to the inverse problem on characteristics using the method of characteristic and singularity extraction.For the last inverse problem, a finite-difference regularized solution is constructed and the convergence estimate is obtained.

Keywords: geoelectrics; inverse problem; finite-difference; regularized solution; convergence of solution.

Введение. В последнее время численным исследованиям обратных задач посвящено множество работ. Например, в диссертационной работе А.В. Баева [1] рассмотрены и исследованы обратные задачи для процессов распространения волн в неоднородных слоистых поглощающих средах, разработаны устойчивые методы их решения, позволяющие оценивать состоятельность рассматриваемых моделей и определять характеристики материальной среды и параметры источника возмущений по имеющейся экспериментальной информации, а также практическом решении ряда актуальных обратных задач вертикального сейсмического профилирования в скважинной разведочной геофизике.

Диссертационная работа М.А. Шишленина [2] посвящена разработке и обоснованию численных методов решения многомерных обратных и некорректных задач акустики и электродинамики. Разработаны новые методы регуляризации задачи продолжения с части границы решений уравнений акустики и электродинамики.

В монографии М.И. Эпова и И.Н. Ельцова [3] приводятся результаты исследований в области решения прямых и обратных задач индуктивной геоэлектрики. Основное внимание уделено математическому моделированию и интерпретации нестационарных полей.

В монографии С.И. Кабанихина [4] изложены методы доказательства существования и нахождения решений обратных и некорректных задач в линейной алгебре, интегральных и операторных уравнений, интегральной геометрии, спектральных обратных задач и обратных задач рассеяния. Приведен исчерпывающий справочный материал для линейных некорректных коэффициентных обратных задач для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений. Включено множество примеров обратных задач из физики, геофизики, биологии, медицины и других областей применения математики.

В статье F. Natterer, F. Wiibbeling [5] изложен численный расчет потенциала в уравнении Гельмгольца и разработан метод, который обладает устойчивостью решения и показана сходимость решения в порядке $O(h^4)$.

Полная система уравнений Максвелла, описывающая процессы электродинамики, при некоторых преобразованиях приводится к уравнению геоэлектрики. В монографии [6] излагаются результаты исследований прямых и обратных задач для системы уравнений Максвелла. Многомерное уравнение геоэлектрики при линеаризации сводится к одномерному уравнению вида [6–8]:

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon_0(x)\mu_0(x)} u_{xx}(x,t) + \frac{\mu'_{0x}(x)}{\varepsilon_0(x)\mu_0^2(x)} u_x(x,t) - \frac{\tau_0(x)}{\varepsilon_0(x)} u_t(x,t), \qquad (x,t) \in R_+^2,$$

где $\varepsilon_0(x), \mu_0(x)$ – диэлектрическая и магнитная проницаемость; $\tau_0(x)$ – электропроводимость среды; $u(x,t)$ – распространение электромагнитных волн в среде.

Для приведения уравнения к уравнению с прямолинейной характеристикой, введем новую переменную $z(x) = \int_0^x \sqrt{\varepsilon_0(x)\mu_0(x)}dx$ и новые функции:

$$\varepsilon(z(x)) = \varepsilon_0(x), \mu(z(x)) = \mu_0(x), \tau(z(x)) = \tau_0(x), V(z(x),t) = u(x,t).$$

Сделаем следующие выкладки:

$$u_{tt}(x,t) = V_{tt}(z(x),t), \qquad u_x(x,t) = V'_z(z(x),t)z'_x(x),$$

$$u_{xx}(x,t) = V'_{zz}(z(x),t) \cdot (z'_x(x))^2 + V'_z(z(x),t) \cdot z''_{xx}(x),$$

$$(z'_x(x))^2 = \varepsilon_0(x) \cdot \mu_0(x), \qquad z''_{xx}(x) = (\varepsilon_0(x)\mu_0(x))'_x.$$

Введем обозначения:

$b_0(x) = \varepsilon_0(x)\mu_0(x), \qquad b(z(x)) = b_0(x), \qquad b'_{0x}(x) = b'_z(z(x))z'_x,$ отсюда

$$b'_z(z) = \frac{b'_{0x}(x)}{z'_x(x)} = \frac{b'_{0x}(x)}{\sqrt{b_0(x)}}.$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0(x)\mu_0(x)} \cdot \frac{\mu'_{0x}}{\mu_0(x)} \cdot u'_x(x,t) = \frac{1}{\varepsilon_0(x)\mu_0(x)} \cdot \frac{1}{\mu_0(x)} \left[\mu'_z(z) \cdot z'_x(x) \cdot V'_z(z,t) \cdot z'_x(x) \right] =$$

$$= \frac{\mu'_z(z)}{\mu(z)} \cdot V_z(z,t).$$

В работе [7] А.Дж. Сатыбаевым рассмотрено и построено конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа.

В работе [8] рассмотрена задача геоэлектрики и определена скорость распространения волн. Доказана теорема о сходимости приближенного решения, построенного конечно-разностным методом, к точному решению обратной задачи геоэлектрики и получена оценка сходимости.

В последнее время В.Г. Романовым [9] был развит новый метод исследования обратных задач для гиперболических уравнений, на основе которого получены оценки устойчивости решений ряда проблем, долгое время остававшихся открытыми. Найденные оценки являются основой построения и обоснования новых численных алгоритмов решения задач.

Для обратной задачи, возникающей в электромагнитных процессах, А.Т. Маматкасымовой и А.Дж. Сатыбаевым построено конечно-разностное регуляризованное решение и получена оценка сходимости [10].

Постановка задачи. В связи с изложенным выше, уравнение геоэлектрики в новых функциях будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} - \left[\frac{1}{2}\frac{b'(z)}{b(z)} - \frac{\mu'_z(z)}{\mu(z)}\right]\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} - \frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}\cdot\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}, \qquad (z,t)\in R^2. \tag{1}$$

Уравнение (1) рассмотрим с начальными и граничными условиями следующего вида:

$$V(z,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \quad z\in R_+, \qquad \left.\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = h_0\delta(t) + r_0\theta(t), \qquad t\in R_+, \tag{2}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\theta(t)$ – тета-функция Хевисайда; h_0, r_0 – положительные постоянные числа.

Пусть для обратной задачи задана дополнительная информация о решении прямой задачи:

$$V(z,t)\big|_{z=0} = f(t), \qquad t\in[0,2T] \tag{3}$$

и относительно коэффициентов уравнения выполнены условия:

$$\big(\varepsilon(z), \mu(z), \tau(z)\big)\in\Lambda_0, \tag{4}$$

где

$$\Lambda = \left(\tau(z):\quad \tau(z)\in C^6(R_+),\quad \tau(+0)=0,\quad 0<M_1<\tau(z)<M_2,\quad \|\tau(z)\|_{C^6(R_+)}\le M_3\right). \tag{5}$$

Уравнение геоэлектрики (1) является уравнением гиперболического типа, поэтому задачу можно рассматривать в области $\Delta(T)$ [3]:

$$\Delta(T) = ((z,t):\quad z\in(0,T),\quad |z|<t<2T-|z|). \tag{6}$$

Обратная задача. Определить из задач (1)–(3): $\tau(z)$ – электропроводимость среды при известных значениях $\mu(z)$, $\varepsilon(z)$ – магнитной и диэлектрической проницаемости, а также дополнительной информации о решении прямой задачи (3).

Обозначим через

$$g(z) = -\frac{1}{2}\frac{b'_z(z)}{b(z)} + \frac{\mu'_z(z)}{\mu(z)}.$$

Используя методику В.Г. Романова [9], выделим сингулярную и регулярную части решения прямой задачи (1)–(2). Для чего представим решение задачи в виде:

$$V(z,t) = \tilde V(z,t) + S(z)\theta(t-|z|) + R(z)\theta_1(t-|z|), \tag{7}$$

где $\tilde V(z,t)$ – гладкая непрерывная функция, $\theta_1(t) = t\theta(t)$.

Из (7) получим:

$$V_t'(z,t)=\tilde{V}_t(z,t)+S(z)\delta(t-|z|)+R(z)\theta(t-|z|),$$
$$V_{tt}'(z,t)=\tilde{V}_{tt}(z,t)+S(z)\delta'(t-|z|)+R(z)\delta(t-|z|),$$
$$V_z(z,t)=\tilde{V}_z(z,t)+S_z'(z)\theta(t-|z|)-S(z)\delta(t-|z|)+R_z'(z)\theta_1(t-|z|)-R(z)\theta(t-|z|),$$
$$V_{zz}(z,t)=\tilde{V}_{zz}(z,t)+S_{zz}''(z)\theta(t-|z|)-2S_z'(z)\delta(t-|z|)+S(z)\delta'(t-|z|)+$$
$$+R_{zz}''(z)\theta_1(t-|z|)-2R_z'(z)\theta(t-|z|)+R(z)\delta(t-|z|).$$

Последние выкладки подставим в уравнение (1):

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_{tt}(z,t)+S(z)\delta'(t-|z|)+R(z)\delta(t-|z|)=\tilde{V}_{zz}(z,t)+S_{zz}''(z)\theta(t-|z|)-\\&-2S'(z)\delta(t-|z|)+S(z)\delta'(t-|z|)+R_{zz}''(z)\theta_1(t-|z|)-2R_z'(z)\theta(t-|z|)+\\&+R(z)\delta(t-|z|)+g(z)\tilde{V}_z(z,t)+g(z)S_z'(z)\theta(t-|z|)-g(z)S(z)\delta'(t-|z|)+\\&+g(z)R_z'(z)\theta_1(t-|z|)-g(z)R(z)\theta(t-|z|)-\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}\tilde{V}_t'(z,t)-\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}S(z)\delta(t-|z|)-\\&-\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}R(z)\theta(t-|z|).\end{aligned}\tag{8}$$

При одинаковых $\delta(t-|z|),\theta(t-|z|),\theta_1(t-|z|)$ собираем члены уравнения и приравниваем их к нулю:

$$\delta:\quad 2S_z'(z)+\left[g(z)+\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}\right]S(z)=0,$$
$$\theta:\quad S_{zz}'+g(z)S_z'(z)-2R_z'(z)-\left[g(z)+\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}\right]R(z)=0,$$
$$\theta_1:\quad R_{zz}''(z)+g(z)R_z'(z)=0.$$

При этом получим следующие задачи (с учетом начального условия):

$$\left.\begin{aligned}&S'(z)+\frac{1}{2}\left[g(z)+\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}\right]S(z)=0,\\&S(0)=h_0,\end{aligned}\right\},\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&R_z'(z)+\frac{1}{2}\left[g(z)+\frac{\tau(z)}{\varepsilon(z)}\right]R(z)=\frac{1}{2}S_{zz}''(z)+\frac{1}{2}g(z)S_z'(z),\\&R(0)=r_0.\end{aligned}\right\}.\tag{10}$$

Решая первую систему, получим:

$$S(z)=h_0-\frac{1}{2}\int_0^z\left[g(\xi)+\frac{\tau(\xi)}{\varepsilon(\xi)}\right]S(\xi)d\xi.\tag{11}$$

Решая вторую систему, получим:

$$R(z)=r_0+\frac{1}{2}S_z'(z)+\frac{1}{2}\int_0^z g(\xi)S_\xi'(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^z\left[g(\xi)+\frac{\tau(\xi)}{\varepsilon(\xi)}\right]R(\xi)d\xi\,.\tag{12}$$

В связи с тем, что $\tilde{V}(z,t)\big|_{t<0}\equiv 0$, из полученных выкладок получим следующую обратную задачу с данными на характеристиках:

$$V_{tt}(z,t)=V_{zz}(z,t)+g(z)V_z'(z,t)-\left[g(z)+2\frac{S'(z)}{S(z)}\right]V_t'(z,t),\qquad (z,t)\in\Delta(t),\tag{13}$$

$$V(z,t)\big|_{t=|z|} = S(z), \quad z \in [0,T], \tag{14}$$

$$V(z,t)\big|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0,2T]. \tag{15}$$

Решение. Определить функции $V(z,t), S(z)$ при известных функциях $\varepsilon(z), g(z)$ (они зависит от известных функций $\mu(z)$ и $\varepsilon(z)$), при известной функции $f(t)$ – дополнительная информация о решении прямой задачи.

Если мы определим функцию $S(z)$, то можем определить неизвестную $\tau(z)$ по формуле

$$\tau(z) = -g(z)\varepsilon(z) - \left(\frac{2S'(z)}{S(z)}\right)\varepsilon(z). \tag{16}$$

По формуле Даламбера, для прямой задачи (13)–(14) получим решение прямой задачи:

$$V(z,t) = \frac{1}{2}\left[f(t+z) + f(t-z)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \left\{ g(\xi)V'_\xi(\xi,\tau) - \left[g(\xi) + 2\frac{S'_\xi(\xi)}{S(\xi)}\right]V'_\tau(\xi,\tau)\right\} d\tau d\xi. \tag{17}$$

Отсюда, при $t = z$, получим:

$$V(z,z) \equiv S(z) = \frac{1}{2}\left[f(2z) + f(0)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^z \int_{\xi}^{2z-\xi} \left\{ g(\xi)V'_\xi(\xi,\tau) - \left[g(\xi) + 2\frac{S'_\xi(\xi)}{S(\xi)}\right]V'_\tau(\xi,\tau)\right\} d\tau d\xi. \tag{18}$$

Конечно-разностное решение. Для решения задачи (13)–(15) введем сеточную область:

$$\Delta_h(T) = \left\{ x_i = ih, \quad t_k = kh, \quad h = \frac{T}{2N}; \quad i = \overline{0,N}, \quad ih \le kh \le T - ih \right\},$$

где h сеточный шаг по x,t.

Разностный аналог дифференциального уравнения (13) будет иметь следующий вид [10]:

$$\frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{h^2} = \frac{V_i^{k+1} - 2V_i^k + V_i^{k+1}}{h^2} - g_i\frac{V_i^k - V_{i-1}^k}{h} + e_i\frac{V_i^{k+1} - V_i^{k-1}}{2h}, \ (z_i, t_k) \in \Delta_h(T), \tag{19}$$

где
$$e_i = g_i + 2\frac{S_i - S_{i-1}}{hS_i}. \tag{20}$$

Тогда получим:

$$V_{i+1}^k = V_i^{k+1} + V_i^{k-1} - V_{i-1}^k + hg_i(V_i^k - V_{i-1}^k) + he_i\frac{\left(V_i^{k+1} - V_i^{k-1}\right)}{2h}, i = \overline{1,N-1}, \quad k = \overline{i,N-1}. \tag{21}$$

Из последних выражений можно получить рекуррентную формулу [7]:

$$V_i^{k+1} = V_{i-1}^{k+2} + V_{i-1}^k - V_{i-2}^{k+1} + hg_{i-1}(V_{i-1}^{k+1} - V_{i-2}^{k+1}) + he_{i-1}\frac{\left(V_{i-1}^{k+2} - V_{i-1}^k\right)}{2h}, i = \overline{2,N-2}, \quad k = \overline{i-1,N-i-1};$$

$$V_i^{k-1} = V_{i-1}^k + V_{i-1}^{k-2} - V_{i-2}^{k-1} + hg_{i-1}(V_{i-1}^{k-1} - V_{i-2}^{k-1}) + he_{i-1}\frac{\left(V_{i-1}^k - V_{i-1}^{k-2}\right)}{2}, i = \overline{2,N-2}, \quad k = \overline{i-2,N}.$$

Подставляя последние выражения последовательно в правую часть (21), а также записывая такую же рекуррентную формулу и подставляя ее в (21), продолжая этот процесс, получим разностный аналог интегральной формулы Даламбера (17):

$$V_{i+1}^{k}=\frac{\left(f^{k+i+1}+f^{k-i-1}\right)}{2}+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}g_{\mu}\left(V_{\mu}^{k-i-\mu+2p}-V_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p}\right)-$$
$$-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}e_{\mu}\frac{\left(V_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1}-V_{\mu}^{k-i-\mu+2p-1}\right)}{2},\qquad i=\overline{1,N-1};\quad k=\overline{i,N-i}. \tag{22}$$

В последней формуле (22) полагая $k=i+1$ и учитывая формулу (14), получим разностный аналог интегральной формулы (18):

$$S_{i+1}=\frac{\left(f^{2i+2}+f^{0}\right)}{2}+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}g_{\mu}\left(V_{\mu}^{-\mu+2p+1}-V_{\mu-1}^{-\mu+2p+1}\right)-$$
$$-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}e_{\mu}\frac{\left(V_{\mu}^{-\mu+2p+2}-V_{\mu}^{-\mu+2p}\right)}{2},\quad i=\overline{1,N-1}. \tag{23}$$

Формулы (22) и (23) составляют систему разностных нелинейных уравнений второго рода.

В разностном аналоге (22) мы записали без малых величин $O(h)$.

Таким образом, для формулы (22) с малой величиной $O(h)$ можно получить такие же формулы как (22) и (23), но с малой величиной $O(h)$. Обозначим решение с малой величиной $O(h)$ через $\tilde{V}_{i+1}^{k}$ и $\tilde{S}_{i+1}^{k}$.

Тогда для $\overline{V}_{i+1}^{k}=V_{i+1}^{k}-\tilde{V}_{i+1}^{k}$ и $\overline{S}_{i}=S_{i}-\tilde{S}_{i}$ получим следующее:

$$\overline{V}_{i+1}^{k}=h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}g_{\mu}\left(\overline{V}_{\mu}^{k-i-\mu+2p}-\overline{V}_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p}\right)-$$
$$-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}e_{\mu}\left(\overline{V}_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1}-\overline{V}_{\mu}^{k-i-\mu+2p-1}\right)+O(h),\quad i=\overline{1,N-1};\quad k=\overline{i,N-i}. \tag{24}$$

$$\overline{S}_{i+1}=h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}g_{\mu}\left(\overline{V}_{\mu}^{-\mu+2p+1}-\overline{V}_{\mu-1}^{-\mu+2p+1}\right)-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}e_{\mu}\left(\overline{V}_{\mu}^{-\mu+2p+2}-\overline{V}_{\mu}^{-\mu+2p}\right)+O(h),\quad i=\overline{1,N-1}. \tag{25}$$

Введем обозначения:

$$G=\max_{i=0,N}\left|g_{i}\right|,\quad E=\min_{i=0,N}\left|e_{i}\right|,\quad \overline{Z}_{i}=\max_{k=i,2N-1}\left|\overline{V}_{i}^{k}\right|,\ i=\overline{0,N};$$
$$\overline{S}_{i}=\max_{i=0,N}\left|S_{i}\right|,\quad \underline{S}_{i}=\min_{i=0,N}\left|S_{i}\right|. \tag{26}$$

Учитывая эти обозначения из (24) и (25), получим оценки:

$$\overline{Z}_{i+1}\le 2hGN\sum_{p=1}^{i}\overline{Z}_{p}+2NhE\sum_{p=1}^{i}\overline{Z}_{p}+O(h). \tag{27}$$

$$\overline{S}_{i+1}\le 2hGN\sum_{p=1}^{i}\overline{Z}_{p}+2NhE\sum_{p=1}^{i}\overline{Z}_{p}+O(h). \tag{28}$$

Пусть $Z_{i+1}=\max\limits_{i=0,N-1}\left(\overline{Z}_{i+1},\overline{S}_{i+1}\right)$, тогда

$$Z_{i+1}\le 2TG\sum_{p=1}^{i}Z_{p}+2TE\sum_{p=1}^{i}Z_{p}+O(h). \tag{29}$$

Используя формулы дискретного аналога леммы Гроноулла–Беллмана, получим:

$$Z_{i+1}\le O(h)\exp(2TG+2TE). \tag{30}$$

Таким образом, доказана сходимость конечно-разностного решения разностной задачи (22) и (23) к решению дифференциальной задачи (13)–(15).

Теорема 1. Пусть решение обратной дифференциальной задачи (14) и (15) существует и $V(z,t)\in C^4(\Delta(T))$, и выполняется условие (4), тогда построенные решения $\left(\tilde{V}_i^k,\overline{S}_i\right)$ обратной задачи (22) и (23) сходятся к точному решению V_i^k, S_i обратной задачи (14) и (15) со скоростью порядка $O(h)$.

Регуляризованное решение. Пусть теперь дополнительная информация о решении прямой задачи задана в виде $f^{\delta}(t)$ и выполнено условие:

$$\left|f(t)-f^{\delta}(t)\right|<\delta,\ \text{ где }\ \delta \text{ – малое число.} \tag{31}$$

Тогда для $\widehat{V}_i^k$ и $\widehat{S}_i^k$ – пара регуляризованного решения обратной задачи, также можно получить формулы (22) и (23), т. е.

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{i+1}^{k,\delta} &= \frac{\left(f^{k+i+1,\delta}+f^{k-i-1,\delta}\right)}{2}+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} g_{\mu}\left(\widehat{V}_{\mu}^{k-i-\mu+2p,\delta}-V_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p,\delta}\right)-\\ &-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}\widehat{e}_{\mu}^{\,\delta}\left(V_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1,\delta}-V_{\mu}^{k-i-\mu+2p-1,\delta}\right), \qquad i=\overline{1,N-1},\quad k=\overline{i,N-i},\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{i+1}^{\delta} &= \frac{\left(f^{2i+2,\delta}+f^{0,\delta}\right)}{2}+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} g_{\mu}\left(\widehat{V}_{\mu}^{-\mu+2p+1,\delta}-\widehat{V}_{\mu-1}^{-\mu+2p+1,\delta}\right)-\\ &-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}\widehat{e}_{\mu}^{\,\delta}\frac{\left(\widehat{V}_{\mu}^{-\mu+2p+2,\delta}-\widehat{V}_{\mu}^{-\mu+2p,\delta}\right)}{2}, \quad i=\overline{1,N-1},\end{aligned} \tag{33}$$

отнимая из формул (22)–(23) формулы (32)–(33), получим:

$$\begin{aligned}\breve{V}_i^{k+1} &\equiv V_{i+1}^{k}-\widehat{V}_{i+1}^{k,\delta}=\frac{\left(f^{k+i+1}-f^{k+i+1,\delta}+f^{k-i-1,\delta}+f^{k-i-1}\right)}{2}+\\ &+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} g_{\mu}\left(V_{\mu}^{k-i-\mu+2p}-\widehat{V}_{\mu}^{k-i-\mu+2p,\delta}+\widehat{V}_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p,\delta}-\widehat{V}_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p}\right)-\\ &-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} e_{\mu}\frac{\left(V_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1}-\widehat{V}_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1,\delta}\right)}{2}-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}\left(e_{\mu}-e_{\mu}^{\delta}\right)\frac{V^{k-i-\mu+2p+1,\delta}}{2},\\ &i=\overline{1,N-1};\quad k=\overline{i,N-i}.\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\breve{S}_i^{k+1} &\equiv S_{i+1}-\widehat{S}_{i+1}^{\delta}=\frac{\left(f^{2i+2}-f^{2i+2,\delta}+f^{0,\delta}+f^{0}\right)}{2}+\\ &+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} g_{\mu}\left(V_{\mu}^{-\mu+2p+1}-\widehat{V}_{\mu}^{-\mu+2p+1,\delta}+\widehat{V}_{\mu-1}^{-\mu+2p+1,\delta}-\widehat{V}_{\mu-1}^{-\mu+2p+1}\right)-\\ &-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} e_{\mu}\frac{\left(V_{\mu}^{-\mu+2p+2}-\widehat{V}_{\mu}^{-\mu+2p+2,\delta}\right)}{2}-h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}\left(e_{\mu}-e_{\mu}^{\delta}\right)\frac{V^{-\mu+2p+2,\delta}}{2}, \quad i=\overline{1,N-1}.\end{aligned} \tag{35}$$

Оценим последние уравнения (35), (36), учитывая введенные нормы:

$$\breve{Z}_{i+1}\le\delta+2hN2\delta\sum_{p=1}^{i}\breve{Z}_p+2hNE2\delta\sum_{p=1}^{i}\breve{Z}_p\underline{\breve{S}}_p+2hNE2\delta\sum_{p=1}^{i}\breve{Z}_p\,, \tag{36}$$

$$\breve{S}_{i+1}\le\delta+2hN2\delta\sum_{p=1}^{i}\breve{Z}_p+2hNE2\delta\sum_{p=1}^{i}\breve{Z}_p\underline{\breve{S}}_p+2hNE2\delta\sum_{p=1}^{i}\breve{Z}_p\,. \tag{37}$$

Пусть теперь $Z^{\delta}_{i+1} = \max\left\{\breve{Z}_{i+1}, \breve{S}_{i+1}\right\}$, тогда из последних выражений получим:

$$\begin{aligned} Z^{\delta}_{i+1} &\le \delta + 4TG\delta\sum_{p=1}^{i} Z^{\delta}_{p} + 4TE\delta\sum_{p=1}^{i} Z^{\delta}_{p} + 4TES\delta\sum_{p=1}^{i} Z^{\delta}_{p} = \\ &= \delta + \left(1 + 4TG\sum_{p=1}^{i} Z^{\delta}_{p} + 4TE\sum_{p=1}^{i} Z^{\delta}_{p} + 4TES\sum_{p=1}^{i} Z^{\delta}_{p}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Используя формулы Гроноула–Беллмана, получим оценку:

$$Z^{\delta}_{i+1} = \delta \cdot \exp\left(1 + 4TG + 4TE + 4TES\right), \tag{39}$$

а если учесть оценку (30), то имеем:

$$Z^{\delta,O(h)}_{i+1} = (\delta + O(h)) \cdot \exp\left(1 + 4TG + 4TE + 4TES\right). \tag{40}$$

Последняя оценка является оценкой регуляризующего решения обратной задачи.

Теорема 2. Пусть решение дифференциальной задачи (13)–(15) существует и $V(z,t) \in C^4(\Delta(T))$, и пусть выполнено условие (4). Тогда построенное конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи $(\widehat{V}^{k,\delta}_i, \widehat{S}^{\delta}_i)$ сходится к точному решению (13)–(15) (V^k_i, S_i) со скоростью порядка *O(h)*, и имеет оценку (40).

По полученному конечно-разностному регуляризованному решению задачи (13)–(15) S^{δ}_i по формуле (16) получим конечно-разностное регуляризованное решение (1)–(3):

$$\tau^{\delta}_i = -\varepsilon_i\left[\frac{1}{2}\frac{(b_i)_{\underline{z}}}{b_i} + \frac{(\mu_i)_{\underline{z}}}{\mu_i} + \frac{2(S^{\delta}_i)_{\underline{z}}}{S_i}\right] = -\varepsilon_i\left[\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_i\mu_i)_{\underline{z}}}{\varepsilon_i\mu_i} + \frac{(\mu_i)_{\underline{z}}}{\mu_i} + \frac{2(S^{\delta}_i)_{\underline{z}}}{S_i}\right] =$$

$$= -\varepsilon_i\left[\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_i\mu_i - \varepsilon_{i-1}\mu_{i-1})}{h\varepsilon_i\mu_i} + \frac{(\mu_i - \mu_{i-1})}{h\mu_i} + \frac{2(S^{\delta}_i - S^{\delta}_{i-1})}{hS^{\delta}_i}\right], \qquad i = \overline{1,N}.$$

Литература

1. *Баев А.В.* Обратные задачи распространения волн в неоднородных слоистых средах и методы их решения: автореф. дис. … д-ра ф.-м.н. / А.В. Баев. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1997.
2. *Шишленин М.А.* Проекционные и итерационные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений: автореф. дис. … канд. ф.-м.н. / М.А. Шишленин. Новосибирск, 2003.
3. *Эпов М.И.* Прямые и обратные задачи индуктивной геоэлектрики в одномерных средах / М.И. Эпов, И.Н. Ельцов. Новосибирск, 1992. 31 с.
4. *Kabanikhin Sergey I.* Inverse and ill-posed problems: theory and applications / Sergey I. Kabanikhin // Published. Berlin; Boston: De Gruyter. XV, 459 p., 2011.
5. *Natterer F.* A Finite-Difference Method for the Inverse Scattering Problem / F. Natterer, F. Wiibbeling. 2005. 14 Jule.
6. *Сатыбаев А.Дж.* Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа / А.Дж. Сатыбаев. Ош, 2001. 143 с.
7. *Романов В.Г.* Обратные задачи геоэлектрики / В.Г. Романов, С.И. Кабанихин. М.: Наука, 1991. 304 с.
8. *Анищенко Ю.В.* Численное определение скорости в задаче геоэлектрики линией с потерями / Ю.В. Анищенко, А.Дж. Сатыбаев // В сб.: Марчуковские научные чтения: тр. межд. научн. конф. 2017. С. 28–33.
9. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. М.: Научный мир, 2005. 295 с.
10. *Маматкасымова А.Т.* Разработка конечно-разностного регуляризованного решения одномерной обратной задачи, возникающей в электромагнитных процессах / А.Т. Маматкасымова, А.Дж. Сатыбаев // СибАК. Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. XXXVIII межд. науч.-практ. конф. Новосибирск, 2016. №1(36). С. 28–45.