

УДК 537.523 (575.2) (04)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА КЕРАМИЧЕСКОЙ ТРУБЫ В МИКРОВОЛНОВОЙ ПЕЧИ

В.М. Лелевкин – докт. физ.-мат. наук, профессор,

П.В. Козлов – канд. физ.-мат. наук

Mathematical model of stationary thermal states and dynamics of ceramic tube heating calculation is developed. Numerical analysis of geometrical size, power and frequency of electromagnetic fields influence on aluminum oxide ceramic tube is worked out.

Введение. В работах [1–3] выполнен численный анализ стационарных тепловых состояний и проведено исследование динамики нагрева протяженного керамического цилиндра микроволновым излучением. Показано, что перепад температуры в керамическом материале составляет незначительную величину по сравнению с максимальной температурой. Это было положено в основу построения аналитических моделей микроволнового нагрева керамических изделий, имеющих форму пластины, цилиндра и сферы.

В данной работе разрабатывается математическая модель нагрева протяженной керамической трубы в микроволновой печи. Проводится расчет характеристик керамической трубы и сплошного цилиндра (для сравнения) из окиси алюминия в зависимости от граничных условий, поперечных размеров трубы, подводимой мощности и частоты электромагнитного поля радиального типа.

Математическая модель. Рассматривается протяженная однородная керамическая труба в микроволновой печи (рис. 1). Используются цилиндрическая система координат и свойства осевой симметрии. Проводится моделирование стационарных и нестационарных режимов нагрева керамических изделий электромагнитным излучением.

1. Стационарный режим нагрева. Стационарность тепловых состояний кера-

мической трубы устанавливается из уравнения энергетического баланса между ее нагревом за счет диссипации подводимой мощности электромагнитной волны радиального типа $\vec{E}(0; 0; E_z = E(r))\exp(i\omega t)$, $\vec{H}(0; H_\phi = H(r); 0)\exp(i\omega t)$ и кондуктивным охлаждением путем отвода тепла в окружающий неподвижный газ.

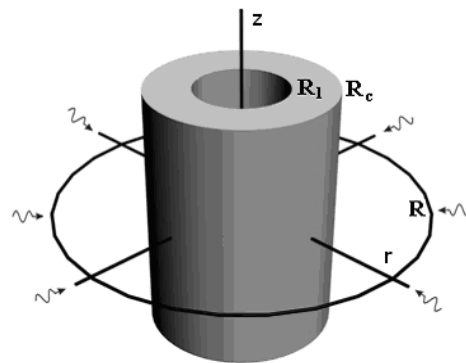


Рис. 1. Схема нагрева протяженной керамической трубы электромагнитным излучением радиального типа: R_1 , R_c , R – радиусы отверстия, цилиндра и камеры микроволновой печи.

Тепловые и электромагнитные характеристики керамической трубы в микроволновой

печи находятся из решения уравнения баланса энергии, приведенного волнового уравнения и следующих граничных условий:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_i \omega \varepsilon_0 E E^* = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) + k_0^2 \varepsilon_c E = 0. \quad (2)$$

$$r = 0: dT/dr = 0, dE/dr = 0;$$

$$r = R: T = T_R, E = E_R.$$

Здесь T – температура; E – напряженность электрического поля; E^* – комплексно-сопряженное значение E ; $\varepsilon_c = \varepsilon_r - i\varepsilon_i$ – комплексная диэлектрическая проницаемость; ε_r , ε_i – действительная и мнимая части ε_c ; λ – теплопроводность; ω – круговая частота; $k_0 = \omega/c$, c – скорость света; r, φ, z – цилиндрические координаты.

На границах (керамика – газ) выполняются условия непрерывности температуры, тепловых потоков, напряженностей электрических и магнитных полей, а значение E_R определяется по заданной величине подводимой мощности электромагнитного поля Q_n .

Для аналитического решения уравнений (1–2) используется приближение однородного распределения коэффициентов по сечению керамической трубы [1]: $\lambda = \lambda(T)$, $\varepsilon_c = \varepsilon_c(T)$. Это оправдано небольшим перепадом температуры по сечению по сравнению с максимальной температурой T_0 , например, для керамического цилиндра из окиси алюминия $\Delta T = T_0 - T_c \approx 60\text{K}$, $T_0 = 2000\text{K}$ [1]. Тогда из решения уравнений (1)–(2) получим:

$$0 \leq r \leq R_1: E(r) = E_0 J_0(k_0 r), T(r) = T_0. \quad (3)$$

$$R_1 < r \leq R_c:$$

$$E(r) = E_0 e(r), e(r) = A_1 H_0^{(1)}(k r) + B_1 H_0^{(2)}(k r),$$

$$T(r) = T_0 - (T_0 - T_c) \frac{\varphi(r)}{\varphi'(R_c)}, \quad (4)$$

$$R_c < r \leq R:$$

$$E(r) = E_0 e(r), e(r) = A_2 H_0^{(1)}(k_0 r) + B_2 H_0^{(2)}(k_0 r),$$

$$S(r) = S_c \frac{\ln(R/x)}{\ln(R/R_c)}, S(T) = \int_{T_R}^T \lambda_{air}(T') dT',$$

$$S_c = S(T_c), \quad (5)$$

здесь $J_0(x)$, $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$ – функции Бесселя и Ханкеля нулевого порядка 1- и 2-го рода, $\varphi(r)$ находится численно из уравнения энергии и следующих граничных условий:

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - e e^* = 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0.$$

Из выражения (5) и условия того, что полный поток энергии электромагнитного поля, поглощенной на единицу длины керамической трубы, отводится теплопроводностью в окружающую среду (неподвижный газ), получим:

$$Q_d = 2\pi r S'(r) = 2\pi \frac{S_c}{\ln(R/R_c)}. \quad (6)$$

Из непрерывности температур и тепловых потоков на внешней границе (керамика – газ) находятся выражения для определения максимального перепада температуры по сечению керамической трубы и осевого значения напряженности электрического поля:

$$\Delta T = T_0 - T_c = \frac{S_c}{\lambda R_c \ln(R/R_c)} \frac{\varphi(R_c)}{\varphi'(R_c)}, \quad (7)$$

$$E_0^2 = \frac{2\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon_i \omega} \frac{T_0 - T_c}{\varphi(R_c)}. \quad (8)$$

Набор коэффициентов суперпозиции падающих и отраженных цилиндрических электромагнитных волн находится из сшивки решений напряженности электрического поля на границах раздела (керамика – газ):

$$A_1 = i\pi R_1 / 4 (k_0 J_1(k_0 R_1) H_0^{(2)}(k R_1) - k J_0(k_0 R_1) H_1^{(2)}(k R_1)),$$

$$B_1 = -i\pi R_1 / 4 (k_0 J_1(k_0 R_1) H_0^{(1)}(k R_1) - k J_0(k_0 R_1) H_1^{(1)}(k R_1)),$$

$$A_2 = A_1 i\pi R_c (k H_1^{(1)}(k R_c) H_0^{(2)}(k_0 R_c) - k_0 H_0^{(1)}(k R_c) H_1^{(2)}(k_0 R_c)) / 4$$

$$+ B_1 i\pi R_c (k H_1^{(2)}(k R_c) H_0^{(2)}(k_0 R_c) - k_0 H_0^{(2)}(k R_c) H_1^{(2)}(k_0 R_c)) / 4,$$

$$B_2 = A_1 i\pi R_c (-k H_1^{(1)}(k R_c) H_0^{(1)}(k_0 R_c) + k_0 H_0^{(1)}(k R_c) H_1^{(1)}(k_0 R_c)) / 4$$

$$+ B_1 i\pi R_c (-k H_1^{(2)}(k R_c) H_0^{(1)}(k_0 R_c) + k_0 H_0^{(2)}(k R_c) H_1^{(1)}(k_0 R_c)) / 4. \quad (9)$$

Подводимая на единицу длины мощность электромагнитного поля и коэффициент отражения вычисляются по формулам [1] и связаны с диссипированной мощностью электромагнитного излучения следующим соотношением:

$$Q_d = (1 - \rho)Q_n = \eta Q_n, \quad \rho = |B_2 / A_2|^2, \\ Q_n = 2|A_2|^2 / \omega \mu_0, \quad (10)$$

где ρ и η – коэффициенты отражения и поглощения. Формулы (3)–(10) дают замкнутое описание характеристик стационарного теплового состояния керамической трубы в поле электромагнитного излучения микроволновой печи с охлаждаемыми стенками.

Результаты. Проводится численный расчет нагрева керамической трубы и сплошного цилиндра (для сравнения по модели [1]) из окиси алюминия электромагнитным излучением в неподвижном воздухе при атмосферном давлении: $R_c=24$ мм, $R_1=6, 12, 18$ мм, $R = 50$ мм; $f=25, 50$ и 100 ГГц. Коэффициенты $\rho_c, C_p, \lambda, \epsilon_r, \epsilon_i$ берутся из тех же источников, что и в работе [1].

Как следует из результатов расчета (рис. 2–5), при нагреве керамических изделий в микроволновой печи профиль температуры по сечению трубы ($\Delta T_n = (T(r) - T_c) / (T_0 - T_c)$) заметно отличается от “линейного” распределения температуры цилиндра. Перепад температуры между максимальным значением (внутренняя стенка) трубы и температурой внешней поверхности ($\Delta T = T_0 - T_c \leq 30$ К, $T_0 = 2000$ К, $f = 50$ ГГц) меньше, чем по сече-

нию цилиндра ($\Delta T \sim 60$ К, $R_c=24$ мм) и уменьшается с сокращением толщины трубы ($\Delta R = R_c - R_1 = 18$ мм, $\Delta T \sim 30$ К; $\Delta R = 12$ мм, $\Delta T \sim 20$ К) (рис. 2). Незначительное изменение температуры керамической трубы подтверждает правильность применения модели однородного распределения коэффициентов [1].

Для реализации стационарных тепловых состояний керамической трубы в поле микроволнового излучения необходима нелинейная зависимость $Q_n(T_0)$, как и для цилиндра. В плоскости (Q_n, T_0) совокупность стационарных тепловых состояний характеризуется нелинейной зависимостью $T_0(Q_n)$ (рис. 3). Каждому значению Q_n соответствуют несколько стационарных состояний T_0 , образованных последовательностью устойчивых ($dT_0/dQ_n > 0$) и не устойчивых ($dT_0/dQ_n < 0$) режимов по отношению к изменению T_0 . Наблюдается пороговое значение Q_n для получения определенных значений температуры, например, $T_0 = 2000$ К может быть достигнута в микроволновой печи при $Q_n > 6$ кВт/м (рис. 3). Причем, для нагрева до температуры 1000К необходимо приложить $Q_n > 6$ кВт/м, тогда как для повышения температуры до 1400 К подводимая мощность электромагнитного излучения должна быть меньше ~ 1 кВт/м. При дальнейшем нагреве требуется вновь увеличить Q_n до 5 кВт/м. Для нагрева керамической трубы требуется больше энергии электромагнитного поля, чем для цилиндра, например, при $f=50$ ГГц, $R_1/R_c = 0,5$, $Q_n = 6,6$ кВт/м (для трубы) и 4,3 кВт/м (для цилиндра).

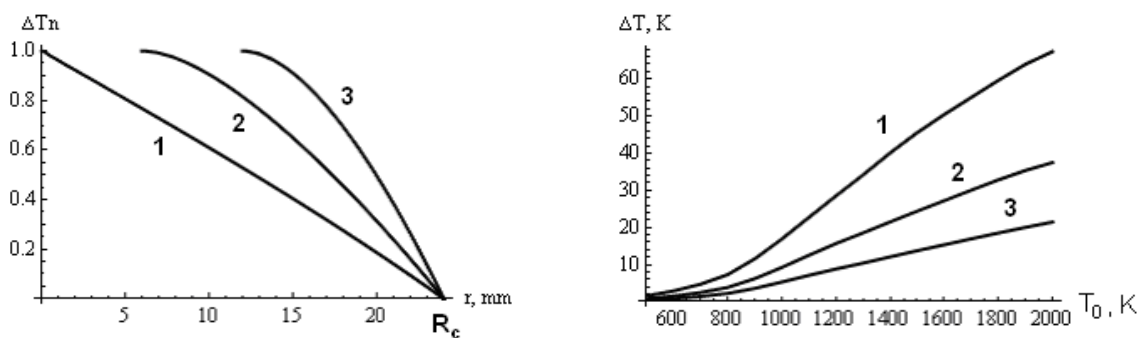


Рис. 2. Распределения температуры по сечению керамического цилиндра: 1 – ($R_1 = 0$) и 2 – трубы ($R_1 = 6$); 3 – 12 мм и зависимость перепада температуры от максимальной температуры.

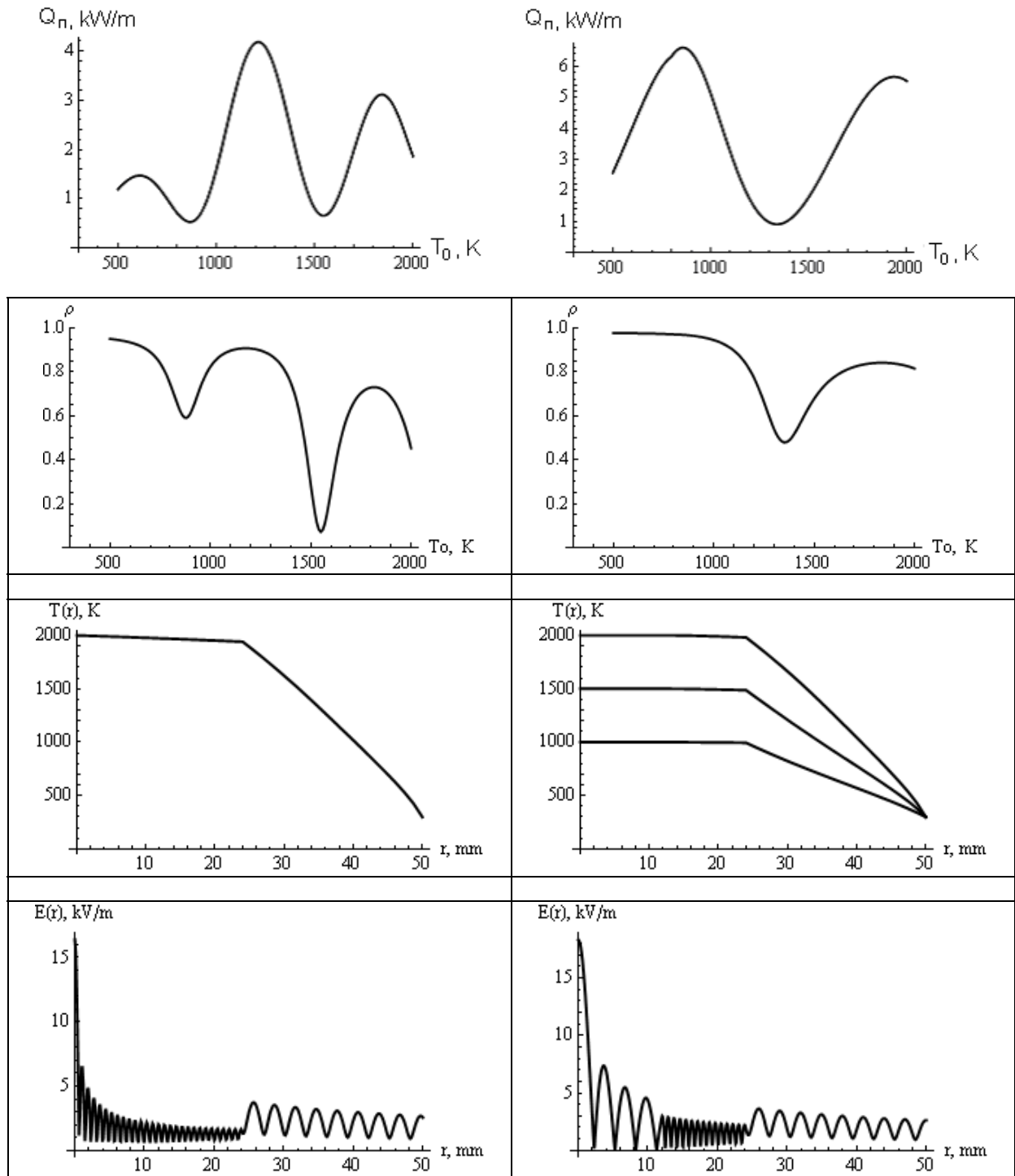


Рис. 3. Сравнение характеристик стационарных тепловых состояний при микроволновых нагревах цилиндра (слева) и трубы (справа) в микроволновой печи с охлаждаемыми стенками: $f=50$ ГГц; $R_1=12$ мм, $R_c=24$ мм.

Вследствие цилиндрической геометрии керамических изделий наблюдается увеличение модуля амплитуды напряженности электрического поля в направлении к оси симметрии (рис. 3). Наличие воздушной полости в центре трубы ($0 \leq r < R_1$) качественно меняет условия прохождения и отражения электромагнитной волны и, как следствие, число точек минимума и максимума для керамической трубы меньше чем для сплошного цилиндра, а $|E|$ в трубе, наоборот, больше, чем у цилиндра (рис. 3). С уве-

личением радиуса и толщины трубы наблюдается периодическое изменение и рост модуля амплитуды коэффициента отражения $\rho(R_c)$. Качественно пропорциональная зависимость $\rho(f)$ прослеживается и с увеличением частоты электромагнитного поля (рис. 4). С уменьшением ΔR или с увеличением отношения R_1/R_c (1. R_1 – растет, $R_c = \text{const}$ или 2. R_c – уменьшается, $R_1 = \text{const}$) $|\rho(R_1/R_c)|$ уменьшается и стремится к полному отражению, т.е. при $R_1/R_c \rightarrow 1$, $\Delta R \rightarrow 0$, $|\rho| \rightarrow 1$ (рис. 5).

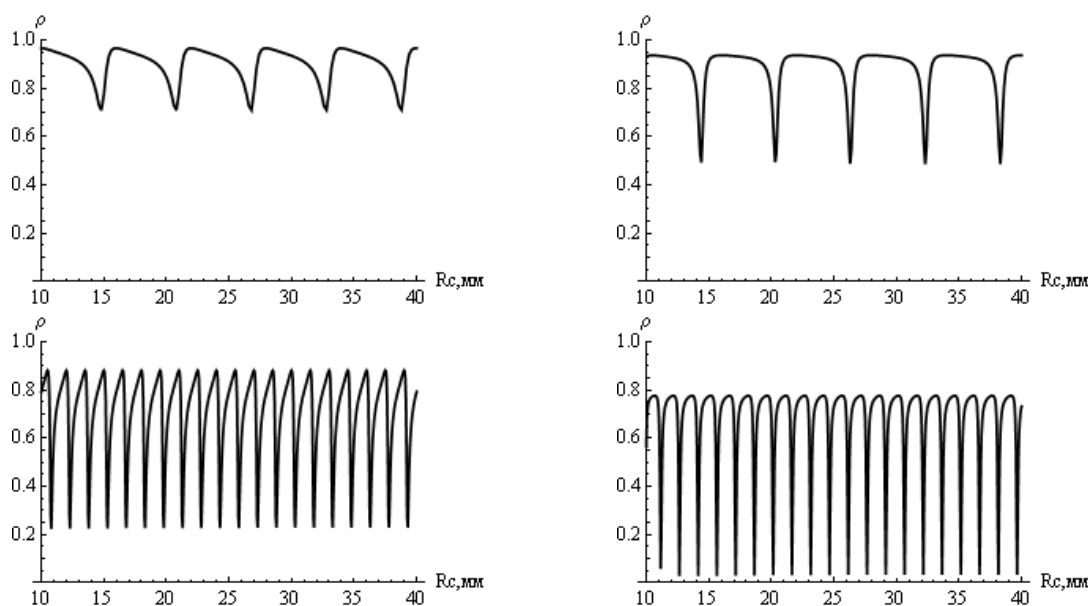


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения от радиуса трубы при фиксированной толщине керамической стенки: $\Delta R = R_c - R_1 = 5$ мм (слева), $\Delta R = 10$ мм (справа) и от частоты электромагнитного поля: $f = 25, 100$ ГГц.

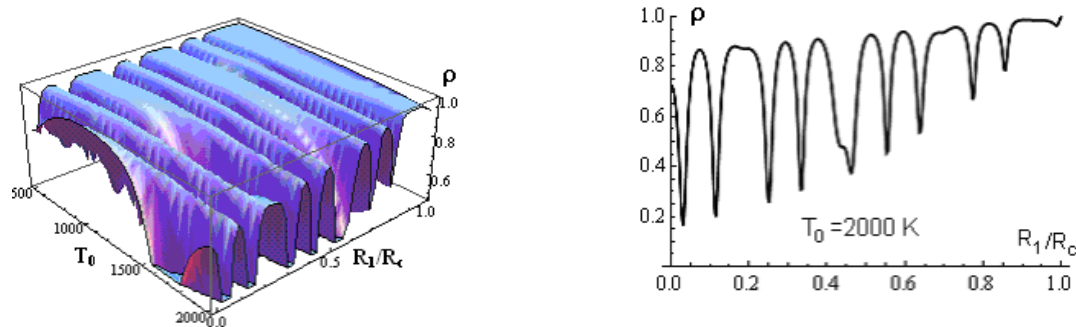


Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения от максимальной температуры и отношения радиусов отверстия и керамической трубы: $f = 25$ ГГц, $R_2 = 24$ мм.

2. Нестационарный режим нагрева. Для исследования динамики микроволнового нагрева керамической трубы используется следующая система уравнений:

$$\rho_c C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_i \omega \varepsilon_0 E E^* ;$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) + k_0^2 \varepsilon_c E = 0 ,$$

здесь ρ_c, C_p – плотность и теплоемкость керамического материала, T – время. Рассматриваются случаи динамического нагрева керамической трубы и цилиндра [1] в микроволновой печи с охлаждаемыми и теплоизолированными стенками.

2.1. Нагрев в микроволновой печи с охлаждаемыми стенками

Учет теплообмена камеры микроволновой печи с внешней окружающей средой устанавливается следующими начальными и граничными условиями:

$$t = 0, 0 \leq r \leq R: T = T(0,r), E(0,r) = 0;$$

$$t \geq 0, r = 0: \partial T / \partial r = 0, \partial E / \partial r = 0;$$

$$r = R: T = T_R, E = E_R.$$

Численное решение. Дискретизация системы нестационарных уравнений проводится методом контрольного объема неявным образом [4]. Дискретные аналоги линеаризуются относительно поправок к зависимым переменным и решаются итеративно на каждом временном шаге с применением метода исключения Гаусса и нижней релаксации. В качестве внешнего параметра электродинамической задачи задается закон изменения мощности подводимой радиальной электромагнитной волны $Q_n(t)$ или осевой температуры $T_0(t)$ керамической трубы по методике [1].

2.2. Нагрев в микроволновой печи с теплоизолированными стенками

Математическая модель заметно упрощается, когда кондуктивный и радиационный теплообмены керамической трубы с окружающей средой и охлаждаемыми стенками микроволновой печи (камеры) отсутствуют (“тепловая баня”). Для ускорения процесса нагрева можно исключить область, занимаемую окружающим газом ($R_c \leq r \leq R$), и как бы упаковать керамическую трубу на внешней границе специальным материалом с низкой теплопроводностью

(аналог “адиабатических” стенок, т.е. при $t \geq 0, r = R_c : \partial T / \partial r = 0$). Это предполагает, что стенки должны быть сделаны из керамического диэлектрического материала ($\lambda \approx 0, \varepsilon_r = \text{const}, \varepsilon_i \approx 0$) и практически не влиять на распространение электромагнитных волн.

Как показали результаты расчета, в этом случае для оценок характеристик нагрева керамического изделия, вследствие незначительного изменения температуры по сечению трубы ($T(t,r) \approx T_0(t)$), можно пренебречь кондуктивным отводом тепла и определить $T_0(t)$ из решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\rho_c C_p \frac{dT_0}{dt} = \frac{\eta Q_n}{\pi(R_c^2 - R_1^2)} . \tag{11}$$

Ниже рассматриваются следующие возможные варианты нагрева керамической трубы в микроволновой печи:

А. Задана постоянная подводимая мощность электромагнитного излучения. Тогда из уравнения (11) находится зависимость времени нагрева керамической трубы от максимальной температуры $t(T_0)$ или наоборот $T_0(t)$:

$$t(T_0) = \frac{\pi(R_c^2 - R_1^2)}{Q_n} \int_{T_R}^{T_0} \frac{\rho_c C_p}{\eta} dT . \tag{12}$$

В. Задана скорость нагрева или закон изменения температуры керамического материала, например, по линейному закону:

$$T_0(t) = T_R + (T_0 - T_R) \cdot t / t_m .$$

В этом случае для определения функциональной зависимости $Q_n(T_0)$ (“подводимая мощность микроволнового излучения – максимальная температура” через временной параметр зависимости $Q_n(t)$) получим следующее соотношение:

$$Q_n(t) = \pi(R_c^2 - R_1^2) \frac{T_0 - T_R}{t_m} \frac{\rho_c C_p}{\eta} . \tag{13}$$

Формула (13) показывает, что подводимая мощность электромагнитного излучения изменяется пропорционально T_0 , ρ_c, C_p и качественно повторяет особенности изменения обратного коэффициента поглощения.

Результаты расчета. Проводится численный анализ динамики нагрева керамической трубы и цилиндра [1] из окиси алюминия в микроволновой печи при тех же условиях, что и выше.

Как видно на рис. 6, в микроволновой печи время нагрева керамической трубы составляет ~ 11 часов, что на 40% больше времени нагрева цилиндра. Большая часть времени ~ 80% идет на медленное увеличение температуры трубы до 1000К, а 20% затрачивается на весь дальнейший цикл нагрева керамики от $T = 1000\text{K}$ до 2000К. Причем, в течение последнего часа, вблизи температур, являющихся точками минимума зависимости $\rho(T_0)$ (см. рис. 3), наблюдается резкое “резонансное” повышение температуры трубы, вызванное соответствующими

увеличениями модуля напряженности электрического поля и диссипированной мощности электромагнитного излучения. Это проявляется в уменьшении коэффициента отражения до 0,5 при $t = 9,5$ часа и дальнейшему его увеличению при $t > 9,5$ часа. Режим нагрева керамического цилиндра идет аналогично, но более сложным образом и с меньшими, почти в 2 раза, затратами мощности электромагнитного поля. Коэффициент отражения имеет 2 минимума $\rho = 0.6$ и 0.1, а модуль напряженности электрического поля 2 максимума (рис. 6).

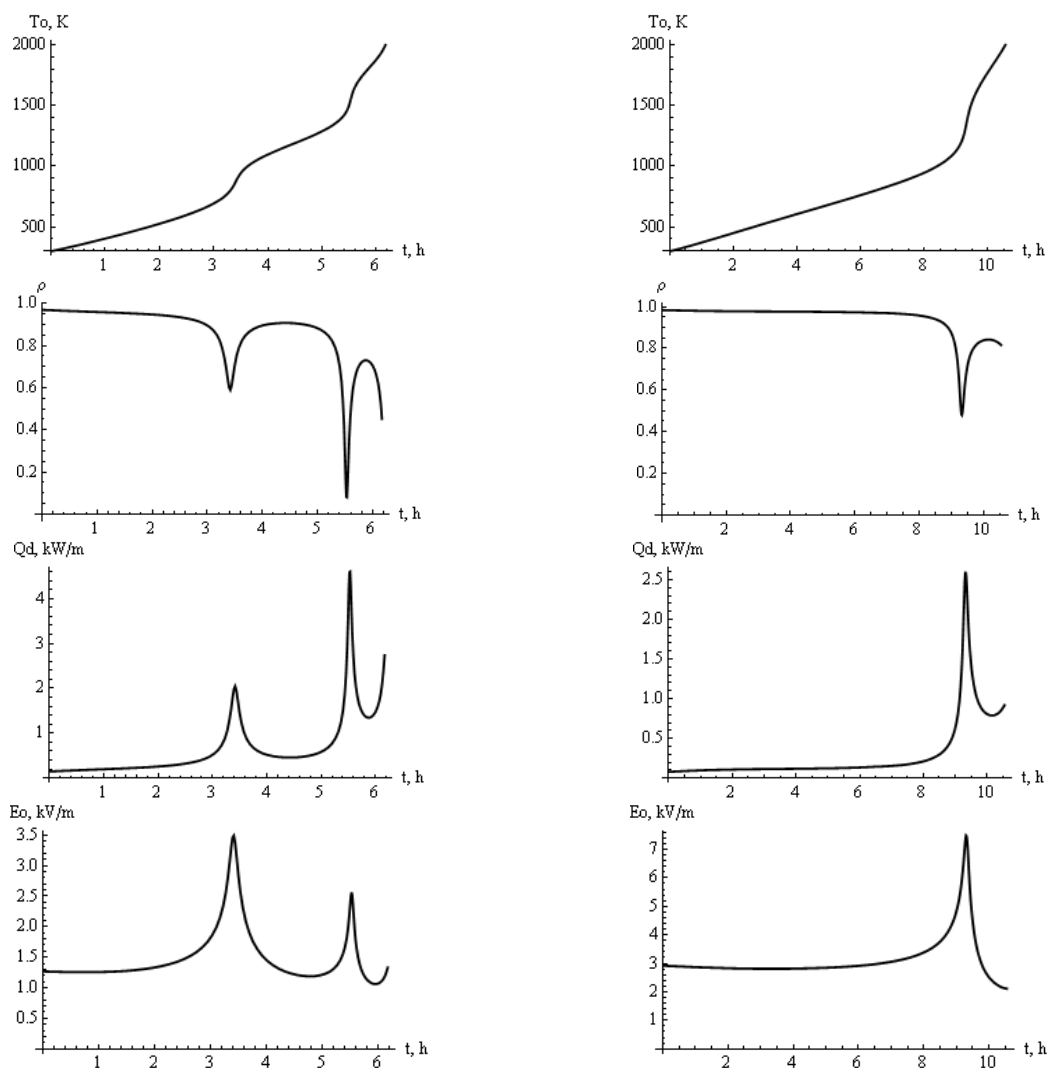


Рис. 6. Изменения тепловых и электродинамических характеристик при нагреве керамического цилиндра (слева) и трубы (справа) в микроволновой печи с теплоизолированными стенками: $Q_{\text{н}}=5$ кВт/м, $f=50$ ГГц, $R_1=12$ мм, $R_c=24$ мм.

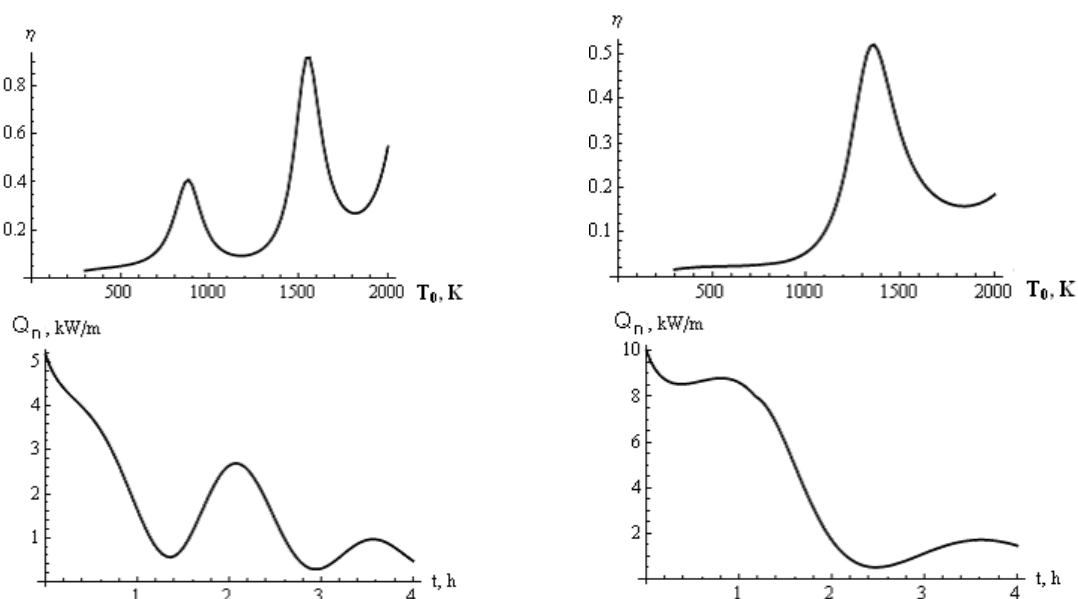


Рис. 7. Изменения тепловых и электродинамических характеристик при нагреве керамического цилиндра (слева) и трубы (справа) в микроволновой печи с теплоизолированными стенками при реализации линейного изменения температуры изделия: $f=50$ ГГц, $R_1=12$ мм, $R_c=24$ мм, $T_0=2000$ К, $t_m=4$ ч.

При реализации в экспериментах линейного изменения температуры нагрева керамической трубы подводимая мощность микроволнового излучения должна нелинейным образом зависеть от времени (рис. 7). Видно, что максимальная подводимая мощность электромагнитного излучения требуется на начальной стадии нагрева и она больше в 2 раза для керамической трубы, чем для цилиндра. При аналогичном нагреве керамического цилиндра требуется практически в 2 раза меньше Q_n , а режим изменения подводимой мощности электромагнитного поля имеет более сложный характер. Следует отметить, что динамика микроволнового нагрева керамической трубы в микроволновой печи с теплоизолированными (адиабатическими) стенками в приближении модели однородных коэффициентов качественно повторяет изменения осевой температуры и коэффициента отражения электромагнитного поля в камере с охлаждаемыми стенками. Это дает основание для оценок “линейного” режима нагрева керамического материала в микроволновой печи пользоваться простым аналитическим выражением (13).

Выводы

1. Разработаны стационарная и нестационарная модели расчета характеристик нагрева керамической трубы в микроволновой печи с охлаждаемыми и теплоизолированными стенками.
2. Проведен численный расчет характеристик нагрева керамической трубы и цилиндра из окиси алюминия в микроволновой печи, который установил:
 - профиль температуры по сечению керамической трубы заметно отличается от “линейного” распределения температуры цилиндра, а перепад температур зависит от толщины трубы и гораздо меньше, чем у цилиндра;
 - подводимая мощность микроволнового излучения и коэффициент отражения нелинейным образом зависят от температуры, толщины керамической трубы и частоты электромагнитного поля;
 - время нагрева керамической трубы в 2 раза продолжительнее, чем цилиндра и требует почти в 2 раза больше затрат энергии электромагнитного поля;

- продолжительность нагрева керамической трубы до температуры 1000К в 5 раз больше, чем время ее нагрева с 1000К до 2000К, а интенсивное увеличение температуры происходит в течение последних 2 часов.

Литература

1. Моделирование и технология получения керамики на основе кремния / Под ред. В.М. Лелевкина, О.Н. Каныгиной. – Бишкек: КРСУ, 2008. – 222 с.

2. Козлов П.В., Лелевкин В.М. Стационарный микроволновый нагрев керамической пластины // Теплофизика высоких температур. – 2007. – Т. 45. – №4. – С. 604–608.

3. Kozlov P.V., Rafatov I.R., Kulumbaev E.B., Lelevkin V.M. On modelling of microwave heating of a ceramic material // Journal of Physics D: Applied Physics. – Vol. 40 (2007). – P. 2927–2935.

4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.