УДК 517.977.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова

Исследована задача нелинейного оптимального управления колебательными процессами в случае вырождения условия оптимальности в виде равенства. Критерием качества управляемого процесса является минимизация интегрального функционала. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Согласно общеизвестной методике теории оптимального управления вычислено приращение функционала и исследована функция типа Понтрягина на максимум в области допустимых значений функции управления. Выписаны условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства, которые должны выполняться одновременно. Установлено, что искомое управление удовлетворяет бесконечномерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода, разрешимость которой исследована операторными методами. Доказано, что операторное уравнение имеет бесконечно много решений и разработан алгоритм их построения. Далее функционал минимизируется на множестве решений операторного уравнения и может иметь одно или несколько решений. Таким образом, найденное управление называется особым оптимальным управлением.

Ключевые слова: обобщенное решение; функционал; принцип максимума; условия оптимальности; система интегральных уравнений Фредгольма первого рода; особые управления.

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕССТЕРИН БАШКАРУУГА ЧЕКТӨӨЛӨР КОЮЛГАН УЧУРДА СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ЖӨНҮНДӨ

А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова

Бул макалада теңдештик түрүндө оптималдуулуктун шарты бузулган учурда термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдуу башкаруу маселеси изилдөөгө алынган. Башкарылуучу процесстин сапатынын критерийи интегралдык функцияны минималдаштыруу болуп саналат. Изилдөө башкарылуучу процесстин чектик маселесине жалпыланган чыгарылыш түшүнүгүн колдонуу менен жүргүзүлгөн. Оптималдуу башкаруу теориясынын белгилүү методологиясына ылайык, функциянын өсүүсү эсептелинет жана Понтрягин тибиндеги функция башкаруу функциясынын жол берилген маанилеринин диапазонунда анын максимумуна чейин изилденет. Оптималдуу башкаруу шарттары теңчилдик жана дифференциалдык теңсиздик түрүндө жазылат, алар бир убакта аткарылууга тийиш. Керектүү башкаруу биринчи түрдөгү сызыктуу Фредгольм интегралдык теңдемелеринин чексиз өлчөмдүү системасын канааттандырары аныкталган, анын чыгарылышы оператордук ыкмалар менен изилденген. Оператордук теңдеменин чексиз көп чыгарылыштары бар экени далилденген жана аларды түзүүнүн алгоритми иштелип чыккан. Андан ары функционал оператордук теңдеменин көптөгөн чыгарылыштарында минималдаштырылган жана бир же бир нече чыгарылышка ээ болушу мүмкүн. Ошентип, табылган башкаруу өзгөчө оптималдуу башкаруу деп аталат.

Түйүндүү сөздөр: жалпыланган чечим; функционалдык; максималдуу принцип; оптималдуу шарттар; биринчи түрдөгү Фредгольм интегралдык теңдемелеринин системасы; өзгөчө башкаруу.

ON THE SOLVABILITY OF THE PROBLEM OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF OSCILLATORY PROCESSES WITH CONSTRAINTS ON CONTROLS

A. Kerimbekov, S.B. Doulbekova

The article investigates the problem of nonlinear optimal control of oscillatory processes, in the case of degeneration of the optimality condition in the form of equality. The criterion for the quality of the controlled process is the minimization of the integral functional. The study was carried out using the concept of a generalized solution to a boundary value problem of a controlled process. According to the well-known methodology of the theory of optimal control, the increment of the functional is calculated and the function of the Pontryagin type is investigated for its maximum in the range of admissible values of the control function. The conditions for optimality of control are written out in the form of equality and differential inequality, which must be fulfilled simultaneously. It is established that the desired control satisfies an infinite-dimensional system of linear Fredholm integral equations of the first kind, the solvability of which was investigated by operator methods. It is proved that the operator equation has infinitely many solutions and an algorithm for their construction is developed. Further, the functional is minimized on the set of solutions to the operator equation and may have one or more solutions. Thus, the found control is called a special optimal control.

Keywords: generalized solution; functional; maximum principle; optimality conditions; system of Fredholm integral equations of the first kind; special controls.

Введение. В работах [1–4] были исследованы задачи нелинейной оптимизации в случаях, когда действия внешних возмущающих сил характеризовались немонотонными (относительно управления) функциями. Исследования проводились при отсутствии ограничений на управления.

В приложениях встречаются задачи управления колебательными процессами при наличии ограничения на управляющих параметрах. Несмотря на обилие исследований управляемых процессов, описываемых в частных производных, такие задачи мало исследованы и не разработаны конструктивные методы их решения. В этом направлении известно очень мало работ. В данной статье для управляемых колебательных процессов, описываемых уравнениями в частных производных второго порядка, исследован случай появления особого управления и разработан алгоритм построения особого оптимального управления.

Постановка задачи нелинейной оптимизации. Рассмотрим задачу, где требуется минимизировать обобщенный функционал:

$$J\left[u(t,x)\right]=\int_0^1\left[V_t(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt,\ \beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи:

$$V_{tt}=V_{xx}+f\left[t,x,u(t,x)\right],\qquad 0<x<1,\quad 0<t<T, \tag{2}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\qquad 0<x<1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\qquad 0<t<T, \tag{4}$$

в случае, когда на управления наложены ограничения следующего вида:

$$N=\left\{u(t,x)\in H(Q)\middle| f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0,\quad p_u\left[t,x,u(t,x)\right]=0\right\}. \tag{5}$$

Эти ограничения сужают класс допустимых управлений, и может оказаться, что известные методы решения задач нелинейной оптимизации станут непригодными. В этой связи возникает необходимость разработки нового метода решения подобного рода задач.

При исследовании данной задачи будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи (2)–(4). Как показано в работе [5], обобщенное решение существует как элемент гильбертова пространства $H(Q)$, где $Q=(0,1)\times(0,T)$, и имеет обобщенные производные: $V_t(t,x)\in H(Q)$ и $V_x(t,x)\in H(Q)$. При этом функции $\psi_2(x)\in H(0,1)$, $\psi_1(x)\in H_1(0,1)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, а функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ и $p\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ считаются заданными, причем функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ и $p\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ нелинейны относительно функции управления $u(t,x)$, и имеют непрерывные производные: $f_u\left[t,x,u(t,x)\right]$ и $p_u\left[t,x,u(t,x)\right]$ $\forall\,(t,x)\in Q$, постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени.

Согласно [6], обобщенное решение $V(t,x)$ определяется по формуле:

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)f_n(\tau,u)d\tau\right]z_n(x)\,, \tag{6}$$

где ψ_{1n},ψ_{2n} и $f_n[t,u]$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x),\psi_2(x)$, $f[t,x,u(t,x)]$.

Согласно условию монотонности функции $f[t,x,u(t,x)]$, заметим, что между элементами пространства состояний $\{V(t,x)\}$ и пространства управлений $\{u(t,x)\}\equiv H(Q)$ имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Условия оптимальности. Пусть $\Delta V(t,x)$ приращение функции $V(t,x)$, соответствующее допустимому приращению $\Delta u(t,x)$ управления $u(t,x)$.

Вычислим приращение функционала (1):

$$\Delta J=-\int_0^T\int_0^1\Big\{\big(f[t,x,u+\Delta u)]-f[t,x,u(t,x)]\big)\omega(t,x)-$$

$$-\beta\big(p[t,x,u+\Delta u]-p[t,x,u(t,x)]\big)\Big\}dxdt+\int_0^1\Delta V_t^2(T,x)dx= \tag{7}$$

$$=-\int_0^T\int_0^1\Delta\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t,x)]dxdt+\int_0^1\Delta V_t^2(T,x)dx,$$

где

$$\Delta\Pi[\,\cdot,u(t,x)]=\Pi[\,\cdot,\,u(t,x)+\Delta u(t,x)]-\Pi[\,\cdot,u(t,x)]\,, \tag{8}$$

$$\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t,x)]=\omega(t,x)f[t,x,u(t,x)]-\beta p[t,x,u(t,x)]. \tag{9}$$

Согласно принципу максимума, на оптимальном управлении $u^0(t,x)$ соотношение:

$$\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u^0(t,x)]=\sup_{u\in D}\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t,x)],$$

где D – множество допустимых значений управления, выполняется почти при всех $(t,x)\in Q$ [7].

Условия оптимальности управления $u(t,x)$, как следствие принципа максимума для систем с распределенными параметрами, определяются соотношениями:

$$\Pi_u(\cdot,u)=\omega(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]-\beta p_u[t,x,u(t,x)]=0. \tag{10}$$

$$\Pi_{uu}(\cdot,u)=\omega(t,x)f_{uu}[t,x,u(t,x)]-\beta p_{uu}[t,x,u(t,x)]<0, \tag{11}$$

где $\omega(t,x)\in H(Q)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи вида:

$$\omega_{tt}-\omega_{xx}=0,\quad 0<x<1,\quad 0\le t<T, \tag{12}$$

$$\omega_t(T,x)=0,\,\omega(T,x)+2[V_t(T,x)-\xi(x)]=0,\ \ 0<x<1, \tag{13}$$

$$\omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\,\omega_x(t,0)=0\,,\ \ 0\le t<T, \tag{14}$$

которая сопряжена с основной краевой задачей (2)–(4).

Условие (11), содержащее функцию $\omega(t,x)$, является трудно проверяемым условием. Однако согласно (10) его можно приводить к виду:

$$f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\left(\frac{p_u\left[t,x,u(t,x)\right]}{f_u\left[t,x,u(t,x)\right]}\right)_u \geq 0\,. \tag{15}$$

На множестве N условие оптимальности (15) приводится к виду:

$$\omega(t,x,u)=0, \tag{16}$$

$$P_{uu}(t,x,u)\geq 0. \tag{17}$$

Теперь находим те управления, для которых имеют место соотношения (16) и (17). Поэтому находим решения сопряженной краевой задачи $\omega(t,x)$.

Ее решение имеет вид [8]:

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[V_n'(T)-\xi_n\right]\cos\lambda_n(T-t)z_n(x)\,, \tag{18}$$

где $V_n'(T)$ – коэффициенты Фурье функций $V_t(t,x)$, вычисленные в точке $t=T$.

Построение искомого управления. Равенство (16) перепишем в виде:

$$\omega(t,x,u)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[V_n'(T)-\xi_n\right]\cos\lambda_n(T-t)z_n(x)=0\,.$$

Отсюда в силу линейной независимости системы функций $\{z_n(x)\}$ относительно управления $u(t,x)$, получим систему нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода вида:

$$\int_0^t\cos\lambda_n(T-\tau)f_n(\tau,u)\,d\tau=h_n,\quad n=1,2,3,..., \tag{19}$$

где

$$h_n=-\xi_n-\lambda_n\psi_{1n}\sin\lambda_nT+\psi_{2n}\cos\lambda_nT,\quad n=1,2,3,...\,. \tag{20}$$

Далее, введя обозначения:

$$G_n(u)=\cos\lambda_n(T-\tau)f_n(\tau,u),\quad n=1,2,3,... \tag{21}$$

систему (19) перепишем в операторной форме:

$$G[u]=\int_0^T\begin{pmatrix}G_1(u)\\ \dots\\ G_n(u)\\ \dots\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}h_1\\ \dots\\ h_n\\ \dots\end{pmatrix}=h, \tag{22}$$

где

$$\int_0^t G_n(u)\,d\tau=h_n,\quad n=1,2,3,....$$

Теперь исследуем разрешимость системы уравнений (22).

Лемма 1. Вектор h является элементом пространства: $\ell_2=\left\{(a_1,...,a_n,...)\,|\,\sum_{n-1}^{\infty}a_n^2<\infty\right\}$, т.е. $h\in\ell_2$.

Доказательство. Согласно (20) и (22), непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\|h\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 == \sum_{n=1}^{\infty} \left[\xi_n + \lambda_n \psi_{1n} \sin \lambda_n T - \psi_{2n} \cos \lambda_n T\right]^2 \le$$

$$\le 3\sum_{n=1}^{\infty} \left[\xi_n^2 + \lambda_n^2 \psi_{1n}^2 + \psi_{2n}^2\right] < 3\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 + \left(1+\lambda_n^2\right)\psi_{1n}^2 + \psi_{2n}^2\right\} \le$$

$$\le 3\left\{\|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2 + \|\psi_1(x)\|_{H_1(0,1)}^2 + \frac{1}{\lambda_1^2}\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2\right\} < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2. Оператор $G[u]$ отображает пространство $H(Q)$ в пространство ℓ_2.

Доказательство.

$$\|G[u]\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^T G_n(u)d\tau\right)^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^T \cos\lambda_n(T-\tau) f_n(\tau,u)\right)^2 dt \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T \cos^2\lambda_n(T-\tau)d\tau \int_0^T f_n^2(\tau,u)d\tau \le T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T f_n^2(\tau,u)d\tau \le T\left\|f\left[t,x,u(t,x)\right]\right\|_{H(Q)}^2 < \infty.$$

Из лемм 1 и 2 следует, что операторное уравнение (22) можно рассматривать в пространстве ℓ_2.

Уравнение (22) перепишем в виде:

$$\int_0^T\int_0^1 \tilde{G}[t,x] f[t,x,u(t,x)]dxdt = h, \tag{23}$$

где

$$\tilde{G}[t,x] = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{G}_n(t,x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_n(t,x) = z_n(x)\cos\lambda_n(T-t).$$

Полагая,

$$f[t,x,u(t,x)] = \nu(t,x), \tag{24}$$

уравнение (23) приводим к виду:

$$\int_0^T\int_0^1 \tilde{G}[t,x]\nu(t,x)dxdt = h. \tag{25}$$

Решение уравнение (25) ищем в виде:

$$\nu(t,x) = \tilde{G}^*[t,x]\alpha + \gamma, \tag{26}$$

где $\alpha = \{\alpha_1,...,\alpha_n,...\}$ – неизвестный постоянный вектор; γ – произвольная постоянная. Подставим (26) в (25), получим соотношение:

$$\int_0^T\int_0^1 \tilde{G}[t,x]\tilde{G}^*[t,x]dxdt \cdot \alpha = h - \gamma\int_0^T\int_0^1 \tilde{G}[t,x]dxdt, \tag{27}$$

которое, введя обозначения:

$$\tilde{A}=\int_0^T\int_0^1\tilde{G}[t,x]\tilde{G}^*[t,x]dxdt,\quad \int_0^T\int_0^1\tilde{G}[t,x]dxdt=q,$$

перепишем в виде бесконечномерной неоднородной системы алгебраических уравнений:

$$\tilde{A}\alpha=h-\gamma q,$$

которая, в операторной форме имеет вид:

$$A[\alpha]=h-\gamma q, \tag{28}$$

где $A[\alpha]=\tilde{A}\alpha.$

Для любого вектора $\eta=\{\eta_1,...,\eta_n,...\}\in\ell_2$ квадратичная форма:

$$\eta^*A\eta=\eta^*\int_0^T\int_0^1\tilde{G}[t,x]\tilde{G}^*[t,x]dxdt\eta=\int_0^T\int_0^1\left\|\tilde{G}[t,x]\eta\right\|_{\ell_2}^2\,dxdt\geq 0,$$

т. е. неотрицательна. Из равенства

$$\left\|\tilde{G}[t,x]\eta\right\|_{\ell_2}^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,x]\eta_n\right)^2=0$$

имеем соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n(x)\cos\lambda_n(T-t)\eta_n=0,$$

которое в силу линейной независимости системы функций: $\{z_n(x)\cos\lambda_n(T-t)\eta_n\}$, имеет место лишь при: $\eta_n=0,\quad n=1,2,3,....$

Таким образом, мы показали, что оператор $A=\tilde{A}\cdot\alpha$ является положительно-определенным. Поэтому существует обратный ограниченный оператор A^{-1} [9] такой, что

$$\left\|A^{-1}[y]\right\|_{\ell_2}\leq M\left\|y\right\|_{\ell_2},\quad M\geq 0. \tag{29}$$

Действуя на операторное уравнение (28) слева обратным оператором A^{-1} находим, что вектор

$$\alpha=A^{-1}(h-\gamma q), \tag{30}$$

который является единственным решением операторного уравнения (28), при каждом фиксированном γ. Найденный вектор α подставим в (26), и получим решение интегрального операторного уравнения Фредгольма первого рода (25) в следующем виде:

$$\nu(t,x)=\tilde{G}^*(t,x)A^{-1}(h-\gamma q)+\gamma\equiv\nu(t,x,\gamma). \tag{31}$$

Далее, в силу условия $f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0$, согласно теореме о неявных [10] функциях из (24) находим, что

$$u^0(t,x)=\varphi[t,x,\nu(t,x)]\equiv\varphi[t,x,\nu(t,x,\gamma)]=u^0(t,x,\gamma). \tag{32}$$

Эта функция при каждом фиксированном γ является решением системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода (23).

Таким образом, установлено, что уравнение (23) имеет бесконечно много решений $u^0(t,x,\gamma)$.

Минимизация функционала. На управлениях $u^0(t,x,\gamma)$ имеет место равенство $V_t\left(T,x\right)-\xi(x)=0$ и функционал (1) приводится к виду:

$$\begin{aligned} J\left[u^0\left(t,x,\gamma\right)\right] &= \int_0^1\left[V_t^0\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma\right)\right]dxdt = \\ &= \beta\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma\right)\right]dxdt=\Phi(\gamma), \end{aligned} \tag{33}$$

который можно рассматривать как функцию от параметра γ. Поскольку γ является произвольной постоянной, значение γ^0, на котором функция $\Phi(\gamma)$ достигает абсолютного минимума, находим из следующих соотношений:

$$\Phi'(\gamma)=\beta\int_0^T\int_0^1 p_u\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma\right)\right]u_\gamma^0\left(t,x,\gamma\right)dxdt=0, \tag{34}$$

$$\Phi''(\gamma)=\beta\int_0^T\int_0^1\begin{pmatrix} p_{uu}\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma\right)\right]\left(u_\gamma^0\left(t,x,\gamma\right)\right)^2 \\ +p_u\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma\right)\right]u_{\gamma\gamma}^0\left(t,x,\gamma\right)\end{pmatrix}dxdt>0. \tag{35}$$

Предположим, что значение γ_0 найдено. Тогда можно показать, что на управлении $u^0\left(t,x,\gamma^0\right)$ выполняются условия:

$$p_u\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma^0\right)\right]=0,\ p_{uu}\left[t,x,u^0\left(t,x,\gamma^0\right)\right]>0,\ \forall\left(t,x\right)\in Q.$$

Заключение. В задачах нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами, функции внешнего воздействия $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и минимизируемого функционала $p\left[t,x,u(t,x)\right]$, нелинейны по функциональной переменной $u(t,x)$. В этом случае принцип максимума следует применять, учитывая те или иные свойства этих функций, которые существенно влияют на разрешимость задачи управления. Например, в случае, когда функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и $p\left[t,x,u(t,x)\right]$ монотонны по функциональной переменной $u(t,x)$, то $f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0$, $p_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0$, и согласно принципу максимума оптимальное управление определяется как единственное решение нелинейного интегрального уравнения Фредгольма специфического вида, которое нелинейно по $u(t,x)$ выражение содержит как под интегралом, так и вне интеграла [10–12].

Если же задачу нелинейной оптимизации решить при ограничениях на управление вида $f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0$ и $p_u\left[t,x,u(t,x)\right]=0$, то, как показывают результаты данного исследования, принцип максимума вырождается и искомое управление определяется как решение бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которая имеет бесконечно много решений. Таким образом, появляется новая задача отбора оптимального управления (или оптимальных управлений) из этого семейства решений.

Из приведенных случаев нетрудно заметить, что задачи нелинейной оптимизации очень чувствительны к изменениям свойств параметров.

Результаты данного исследования могут быть полезными при решении прикладных задач и разработке новых методов качественного исследования и конструктивных методов решения нелинейных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Литература

1. *Доулбекова С.Б.* Исследование одного случая при решении задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний / С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. № 5. С. 65–68.
2. *Доулбекова С.Б.* Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний методом факторизации / С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. 2010. Т. 10. № 9. С. 56–61.
3. *Керимбеков А.* О разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний в классе немонотонных функций / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. 2014. Т. 10. № 1. С. 157–161.
4. *Керимбеков А.* О случаях появления особых управлений при решении задачи нелинейной упругих колебаний / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. № 5. С. 74–77.
5. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. № 4. С. 743–755.
6. *Керимбеков А.* Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Матер. межд. научно-практич. конф. «Информационные технологии: инновации в науке и образовании». Актөбе, 2015. С. 157–160.
7. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
8. *Керимбеков А.* О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник Евразийского нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. Серия: Математика. Компьютерные науки. Механика. 2020. Т. 132. № 3. С. 6–16.
9. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
10. *Kerimbekov A.* On a Class of Solutions of the Nonlinear Integral Fredholm Equation / A. Kerimbekov // Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation: Proceedings of the 11th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden), 2017). Switzerland, Birkhauser, 2019. Pp. 191–197.
11. *Kerimbekov A.* On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations / A. Kerimbekov // Current Trends in Analysis and Its Applications (Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013). A series of trends in mathematics. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. Vol. XVI. Pp. 803–811.
12. *Kerimbekov A. A.* On the Solvability of a Nonlinear Optimization Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations with External and Boundary Controls / A. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences. An International Journal. 2016. Vol. 10. No. 1. Pp. 215–223.