УДК 517.955

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ КОШИ

А.Р. Алиева

Приведены результаты, полученные с использованием преобразования асимптотического характера для решения сингулярно-возмущенной задачи Коши в неограниченной области.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенная задача Коши; интегро-дифференциальные уравнения.

SOLUTION TO NONLINEAR SINGULARLY- PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER WITH CAUCHY CONDITION

A.R. Alieva

The results obtained using the asymptotic character of the transformation for the solution of the singularly perturbed Cauchy problem in an unbounded domain.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem; integro-differential equations.

Несмотря на большое количество фундаментальных работ [1–4, 6], где существуют различные методы исследований сингулярно-возмущенных уравнений, как правило, эти методы применимы вполне к определенным классам указанных уравнений. Существенные трудности возникают при исследовании нелинейных сингулярно-возмущенных уравнений в неограниченной области с условием Коши, где доминируются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

В этой работе приведены результаты, полученные с использованием преобразования асимптотического характера для решения сингулярно-возмущенной задачи Коши в неограниченной области отмеченного выше типа. При этом установлены необходимые и достаточные условия разрешимости исходной и вырожденной задачи с оценкой близости решений в классе непрерывных функций.

Полученные результаты работы применимы к сингулярно-возмущенным обратным задачам [3, 5] в неограниченной области, так как в предлагаемых преобразованиях исходная задача эквивалентно преобразуется к интегральным уравнениям второго рода, в чем и заключается актуальность данной работы.

Рассматривается задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения вида

$$\varepsilon^2(u_{tx^2}+u_{x^3})+\varepsilon\beta u u_x-(u_x+u_t)=f(t,x)+\lambda(Ku)(t,x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,x)=\vartheta(0,x)+\varphi_\varepsilon(x), \forall x\in R, \\ Ku\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,\tau)u(t,\tau)d\tau, t\in[0,T]; \quad D=\{(t,x):0\le t\le T, x\in R\}, \end{cases} \tag{2}$$

где $0<\beta$, λ – известные константы; $0\le K(x,\tau)\in C^{3,0}(D_1), D_1=R\times R$, $C^3(R)\in\varphi_\varepsilon(x)$, $C^{0,3}(D)\in f(t,x)$ – заданные ограниченные функции, причем

$$\sup_R\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(x,\tau)|d\tau\le C_0=const,$$

при этом надо найти функцию *u(x, t)*.

П. 1. Если предположим, что $\varepsilon = 0$, то из (1) следует задача:

$$\vartheta_t(t,x)+\vartheta_x(t,x)=-(f(t,x)+\lambda K\vartheta), \tag{3}$$

$$\vartheta|_{t=0}=\vartheta(0,x)\equiv\varphi_0(x),\ \forall x\in R, \tag{4}$$

где $C^3(R) \in \varphi_0(x)$. Задача (3), (4) преобразуется к виду

$$\vartheta(t,x) = \varphi_0(x-t) - \int_0^t [f(\nu, x-(t-\nu)) + \lambda(K\vartheta)(\nu, x-(t-\nu))]d\nu \equiv P\vartheta, \qquad (5)$$

так как имеет место

$$\begin{cases} \vartheta_t(t,x) = -\varphi_{0l_1}(x-t) - (f(t,x) + \lambda K\vartheta) + \int_0^t [f_l(\nu, x-(t-\nu)) + \lambda(K\vartheta)_l(\nu, x-(t-\nu))]d\nu, \\ \vartheta_x(t,x) = \varphi_{0l}(x-t) - \int_0^t [f_l(\nu, x-(t-\nu)) + \lambda(K\vartheta)_l(\nu, x-(t-\nu))]d\nu, \\ \vartheta_t(t,x) + \vartheta_x(t,x) = -(f(t,x) + \lambda K\vartheta), (\text{см.}(3)), \quad (l_1 = x-t; \ \ l = x-(t-\nu)). \end{cases}$$

Пусть относительно оператора *P* допускаются условия Банаха [3]:

$$\begin{cases} d_P = \lambda C_0 T \le \dfrac{1}{2}, \\ P: S_r \to S_r, \quad (S_r(\vartheta_0) = \{\vartheta : |\vartheta - \vartheta_0| \le r, \forall (t,x) \in D\}), \\ \|(P\vartheta_0)(t,x)\|_C \le (1-d_P)r, \end{cases} \qquad (6)$$

тогда уравнение (5) имеет единственное решение в $C^{1,3}(D)$, причем решение находим методом Пикара

$$\begin{cases} \vartheta_{n+1} = P\vartheta_n, (n = 0,1,...), \\ \|\vartheta_{n+1} - \vartheta\|_C \le d_P^{n+1} r \xrightarrow[n\to\infty]{d_P<1} 0, \\ \|\vartheta\|_C \le (1-d_P)^{-1} TM_0, (M_0 = \|\varphi_0\|_C + M_1 T; \ \ M_1 = \|f\|_C). \end{cases} \qquad (7)$$

Лемма 1. В условиях (6), (7) задача (3), (4) разрешима в $C^{1,3}(D)$.

П.2. Чтобы найти решение задачи (1), (2) поступим следующим образом: решение (1) будем искать в виде

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t,x) = \vartheta(t,x) + \varphi_\varepsilon(x-t) + \xi(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ \xi(0,x) = 0, \forall x \in R; \quad \xi \in C^{1,3}(D). \end{cases} \qquad (8)$$

Тогда подставляя (8) и

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t}(t,x) = \vartheta_t(t,x) - \varphi_{\varepsilon l_1}(x-t) + \xi_t(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ u_{\varepsilon x}(t,x) = \vartheta_x(t,x) + \varphi_{\varepsilon l_1}(x-t) + \xi_x(t,x), \\ u_{\varepsilon t}(t,x) + u_{\varepsilon x}(t,x) = \vartheta_t(t,x) + \vartheta_x(t,x) + \xi_t(t,x) + \xi_x(t,x), \\ u_{\varepsilon tx}(t,x) + u_{\varepsilon x^2}(t,x) = \vartheta_{tx}(t,x) + \vartheta_{x^2}(t,x) + \xi_{tx}(t,x) + \xi_{x^2}(t,x), \\ u_{\varepsilon tx^2}(t,x) + u_{\varepsilon x^3}(t,x) = \vartheta_{tx^2}(t,x) + \vartheta_{x^3}(t,x) + \xi_{tx^2}(t,x) + \xi_{x^3}(t,x), \end{cases} \qquad (9)$$

в (1), получим:

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\xi_{tx^2} + \xi_{x^3}) + \varepsilon\beta[(\vartheta + \varphi_\varepsilon + \xi)\xi_x + \xi(\vartheta_x + \varphi_{\varepsilon x})] - (\xi_x + \xi_t) = Y_\varepsilon(t,x) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\tau)\xi(t,\tau)d\tau, \\ Y_\varepsilon(t,x) \equiv -\varepsilon^2\beta(\vartheta + \varphi_\varepsilon)(\vartheta_x + \varphi_{\varepsilon x}) - \varepsilon[\vartheta_{tx^2} + \vartheta_{x^3}] + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\tau)\varphi_\varepsilon(\tau - t)d\tau, \\ |Y_\varepsilon(t,x)| \le \varepsilon^2\beta(r_0 + \Delta_0(\varepsilon))(\tilde{r}_0 + \Delta_0(\varepsilon)) + 2\varepsilon\tilde{r}_0 + \lambda C_0\Delta_0(\varepsilon) = \Delta_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \ \forall (t,x) \in D, \\ |\varphi_{\varepsilon x}^{(i)}(x)| \le \Delta_0(\varepsilon), (i = 0,1), \ \forall (t,x) \in D; \ \ \|\vartheta\|_C \le r_0, \ (|\vartheta_x|, |\vartheta_{tx^2}|, |\vartheta_{tx^3}| \le \tilde{r}_0, \ \forall (t,x) \in D). \end{cases} \qquad (10)$$

Поэтому решение уравнения (10) строим по правилу:

$$\xi(t,x)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu,\ (\xi(0,x)=0,\ \forall(t,x)\in D). \tag{11}$$

Далее, дифференцируя (11) по совокупности аргументов, имеем:

$$\begin{cases}\xi_t(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu+\\ +\dfrac{1}{\varepsilon^3}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu,\\ \xi_x(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu;\\ \xi_t(t,x)+\xi_x(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds,\\ \xi_{tx}(t,x)+\xi_{x^2}(t,x)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds,\\ \xi_{tx^2}(t,x)+\xi_{x^3}(t,x)=-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\eta_\varepsilon(t,x)+\dfrac{1}{\varepsilon^3}\displaystyle\int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_x^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau+\\ +\dfrac{1}{\varepsilon^4}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds=-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\eta_\varepsilon(t,x)+\dfrac{1}{\varepsilon^4}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(t,\tau)d\tau ds.\end{cases} \tag{12}$$

Следовательно, с учетом (11) и (12) уравнение (10) эквивалентно преобразуется к интегральному уравнению второго рода:

$$\begin{cases}\eta_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)\times\\ \times(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)+\\ +(\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau ds d\nu]-Y_\varepsilon(t,x)-\lambda\int_{-\infty}^\infty K(x,\tau)\times\\ \times\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^{\tau-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)}\int_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau')}\eta_\varepsilon(\nu,\tau')d\tau' ds d\nu d\tau\equiv(H\eta_\varepsilon)(t,x).\end{cases} \tag{13}$$

Если относительно оператора H выполняются условия Банаха

$$\begin{cases}d_H<1,\\ H:S_{r_1}\to S_{r_1},\quad (S_{r_1}(0)=\{\eta:|\eta(t,x)|\le r_1,\forall(t,x)\in D\}),\quad \|(H0)(t,x)\|_C\le(1-d_H)r_1:\\ \|(H\eta)(t,x)\|_C\le\|(H\eta)(t,x)-(H0)(t,x)\|_C+\|(H0)(t,x)\|_C\le d_H r_1+(1-d_H)r_1=r_1,\end{cases} \tag{14}$$

то уравнение (13) разрешимо в $C(D)$, причем

$$\|\eta\|_C\le(1-d_H)^{-1}\|Y_\varepsilon(t,x)\|_C\le(1-d_H)^{-1}\Delta_1(\varepsilon)=\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0, \tag{15}$$

где

$$\begin{cases} |\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)| = | \ \varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_2(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)\times(\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_2(\nu,\tau)d\tau d\nu - \\ -\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_2(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)+(\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_2(\nu,\tau)d\tau ds d\nu]- \\ -Y_\varepsilon(t,x)-\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty K(x,\tau)\times\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\tau-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau')}\eta_2(\nu,\tau')d\tau' ds d\nu d\tau-\{\varepsilon\beta[(\vartheta+\varphi_\varepsilon+ \\ +\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_1(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)(\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\nu}^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-\tau)}\eta_1(\nu,\tau)d\tau d\nu - \\ -\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_1(\nu,\tau)d\tau ds d\nu)+(\vartheta_x+\varphi_{\varepsilon x})\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\times\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\eta_1(\nu,\tau)d\tau ds d\nu]-Y_\varepsilon(t,x)- \\ -\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty K(x,\tau)\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\tau-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)}\times\int\limits_s^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau')}\eta_1(\nu,\tau')d\tau' ds d\nu d\tau\} \ \Big| \le \{\beta[2T(r_0+\Delta_0(\varepsilon))+4Tr_1+\varepsilon(\tilde{r}_0+\Delta_0(\varepsilon))T]+ \\ +\lambda C_0 T\}\times\|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\| \le d\,\|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\| = \|\eta_2(t,x)-\eta_1(t,x)\|, \\ d_H=\beta[2T(r_0+1)+4Tr_1+(\tilde{r}_0+1)T]+\lambda C_0 T, \ (d_P=\lambda C_0 T\le\frac{1}{2}; \ 0<\beta,\lambda<1; \ \Delta_0(\varepsilon),\varepsilon\in(0,1)). \end{cases}$$

Поэтому решение (13) находим методом Пикара:

$$\begin{cases} \eta_{n+1}=H\eta_n,(n=0,1,...), \\ \|\eta_{n+1}-\eta\|_C \le d_H^{n+1} r_1 \xrightarrow[n\to\infty]{d_H<1} 0. \end{cases} \tag{16}$$

Учитывая результаты леммы 1 и (15), на основе (11) получим:

$$|\xi(t,x)| \le T\|\eta_\varepsilon(t,x)\|_C \le T\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \ \forall(t,x)\in D. \tag{17}$$

Лемма 2. При выполнении условий (14), (16) уравнение (13) разрешимо

C(D. Следовательно, функция ξ единственным образом определяется по правилу (11) в $C^{1,3}$*(D)*.

Поэтому имеет место

Теорема 1. В условиях лемм 1, 2 близость решения задач (1), (2) и (3), (4) оценима в смысле *C(D)*, когда ε→0.

Доказательство. В самом деле, в условиях лемм 1, 2 вырожденная задача (3), (4) и задача (10) разрешимы в $C^{1,3}$*(D).* Тогда на основе результатов лемм 1,2, с учетом (8) получим:

$$\|u_\varepsilon(t,x)-\vartheta(t,x)\|_C \le \|\varphi_\varepsilon(x)\|_C + \|\xi(t,x)\|_C \le \Delta_0(\varepsilon)+T\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{18}$$

Таким образом, мы показали, что решение сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) строится по правилу (8), причем имеет оценка вида (18). Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Бободжанов А.А.* Сингулярно-возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами / А.А. Бободжанов, В.Ф. Сафронов // Математические заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 654–664.
2. *Винокуров В.П.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра / В.П. Винокуров // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 10. С. 1732–1744.
3. *Иманалиев М.И.* Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение / М.И. Иманалиев. Фрунзе: Илим, 1977. 348 с.
4. *Наумкин П.И.* Обобщенные решения для уравнения Уизема / П.И. Наумкин, И.А. Шишмарев // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. Вып. 1. С. 121–126.
5. *Омуров Т.Д.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса / Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев // ИТ и ПМ НАН КР. Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. М.: Мир, 1977. 622 с.