

УДК 539.374

ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ЖЕСТКО-ЗАКРЕПЛЕННОМ ТОРЦЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Ш. Мамаев

Методом бихарактеристик численно решена в трехмерной постановке упруго-пластическая задача о продольном ударе по параллелепипеду, по одному концу которого производится удар, а другой конец жестко закреплен. Исследуется эффект взаимного влияния отраженных от закрепленной, боковой границы волн напряжений и динамических возмущений на напряженно-деформированное состояние в жестко-закрепленном торце.

Ключевые слова: метод бихарактеристик; продольный удар; упругопластическая волна; волна разгрузки.

STRESS WAVES IN A TIGHTLY-SECURED END OF ELASTIC-PLASTIC BODY

Sh. Mamayev

An elastic-plastic problem of longitudinal impact over the parallelepiped, on the one end of which the hit is produced, and the other end is tightly-secured, has been numerically solved by bicharacteristic method in three-dimensional formulation. It studies the effect of the mutual influence of reflected from fixed, lateral border of stress waves and dynamic disturbances on the stress-strain state in a tightly-secured end..

Key words: bicharacteristic method; longitudinal impact; elastic-plastic wave; unloading wave.

Проблема ударного воздействия стержня с преградой имеет большое прикладное значение, связанное с созданием эффективных поражающих и защитных средств. Решение этой проблемы требует производить расчеты упругих и упругопластических волновых процессов в стержне и мишени с целью оценки их прочности. Исследованию особенностей распространения возмущений в телах конечных размеров в трехмерной постановке посвящено небольшое число работ. Рассмотрим некоторые из них.

В работе [1] рассмотрена задача динамического изгиба жестко закрепленной по концам балки. В [2, 3] численно исследован процесс соударения и отскока ударников в форме прямоугольного параллелепипеда от абсолютно жесткой преграды. В [4] методом дробных шагов решена задача определения трехмерного напряженно-деформированного состояния упругопластического стержня, к торцу которого мгновенно приложена осевая скорость перемещения, независимая от времени. В [5] рассмотрены трехмерные задачи импульсного нагружения монолитных и двухслойных деформируемых плит, а также об ударе под углом жестким шаром по деформируемой преграде. В [6] методом характеристических поверхностей рассмотрена задача о поперечном ударе по толстой призматической оболочке.

В [7] методом бихарактеристик рассмотрены два примера о динамическом изгибе прямоугольного ортотропного параллелепипеда с одним закрепленным концом. В [8, 9] улучшена устойчивость разностной схемы и дано развитие метода бихарактеристик к упругопластическим задачам. Рассмотрена упругая и упругопластическая задача о продольном ударе по прямоугольному параллелепипеду.

В данной работе исследуется влияние закрепленного конца параллелепипеда, размеров его поперечного сечения на напряженно-деформированное состояние в жестко-закрепленном торце.

Основные уравнения. Процесс распространения динамических возмущений в изотропной упруго-пластической среде описывается системой полулинейных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$\begin{cases} \dot{v}_\alpha - \sigma_{\alpha i, i} = 0, \\ \dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \lambda v_{i, i} \delta_{\alpha\beta} - \mu (v_{\alpha, \beta} + v_{\beta, \alpha}) = \Phi_{\alpha\beta}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь λ, μ – постоянные Ламе, запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей переменной, точка над переменной означает дифференцирование по времени t ; $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера. По повторяющимся

Таблица 1 – Экспериментальная зависимость напряжений от деформаций

$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\sigma_i / 9.8 \text{ МПа}$	$\sigma_i / \rho c_1^2 \cdot 10^4$	$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\sigma_i / 9.8 \text{ МПа}$	$\sigma_i / \rho c_1^2 \cdot 10^4$
0	0	0	19	26.5	9.8429
4	8.00	2.9714	20	27.0	10.0286
6	12.00	4.4572	21	27.5	10.2143
8	16.00	5.9429	22	28.0	10.4000
10	20.00	7.4286	24	28.4	10.5486
11	20.75	7.7072	26	28.8	10.6972
12	21.50	7.9857	28	29.2	10.8458
13	22.25	8.2643	30	29.6	10.9943
14	23.00	8.5429	32	30.0	11.1429
15	23.75	8.8215	46	32.0	11.8858
16	24.50	9.1000	72	34.0	12.6286
17	25.25	9.3786	143	36.0	13.3715
18	26.00	9.6572	3600	74.0	27.4858

латинским индексам производится суммирование от 1 до 3. Безразмерные компоненты вектора скорости частиц v_α , тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, время t и декартовы координаты x_α определяются через соответствующие размерные величины:

$$x_\alpha = \frac{\bar{x}_\alpha}{l}, t = \frac{t \cdot c_1}{l}, \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\rho c_1^2}, v_\alpha = \frac{\bar{v}_\alpha}{c_1}, c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2)$$

где черта над переменной означает размерную величину; l – характерная длина; c_1 – скорость распространения продольной волны, ρ – плотность среды. $\Phi_{\alpha\beta}$ – некоторая функция, связанная со скоростью неупругой части деформации, которая представляется в виде

$$\Phi_{\alpha\beta} = -(\lambda \cdot F_{ii} \cdot \delta_{\alpha\beta} + 2\mu F_{\alpha\beta}), \quad (3)$$

где $F_{\alpha\beta}$ – скорость неупругой части деформации

$$F_{\alpha\beta}(\sigma_i, \chi_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{\sigma}_i \leq 0, \\ 3(1/E_k - 1/E) \dot{\sigma}_i s_{\alpha\beta} / (2\sigma_i) & \text{при } \dot{\sigma}_i > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $S_{\alpha\beta}$ – компоненты девиатора напряжений; σ_i – интенсивность напряжений; E – модуль упругости; $E_k = d\sigma/d\varepsilon$ – касательный модуль к кривой деформирования.

Постановка задачи. Рассматривается задача о продольном ударе по телу в форме прямоугольного параллелепипеда $\{0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq c\}$. Тело в начальный момент времени t находится в состоянии покоя

$$v_i = 0, \sigma_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ при } t = 0. \quad (5)$$

В любой другой момент времени $t > 0$ на границе действует равномерно распределенная по торцу $x_2 = 0$ нормальная к ней растягивающая нагрузка, изменяющаяся во времени по закону непрерывно дифференцируемой функции $f(t)$, которая вначале монотонно возрастает до максимального значения $f(t_0)$, а затем монотонно убывает

$$\sigma_{22} = f(t), \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0 \text{ при } x_2 = 0. \quad (6)$$

Торец $x_2 = b$ параллелепипеда жестко закреплен, т.е.

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0 \text{ при } x_2 = b \quad (7)$$

Остальные грани параллелепипеда свободны от каких-либо воздействий, т.е.

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a \quad (8)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \text{ при } x_3 = 0 \text{ и } x_3 = c. \quad (9)$$

Необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние в жестко-закрепленном торце при $t > 0$.

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1) при нулевых начальных (5) и граничных (7) – (9) условиях.

В расчетах принято

$$f(t) = \begin{cases} A[1 - \cos(2\pi t / T)] \text{ при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases} \quad (11)$$

$A = 0.00015$ – постоянный множитель, $T = 80\tau$ – период действия нагрузки; $s_{22}^{\max}(t = 40\tau) = 0.0003$. Характеристики материала приведены в таблице 1. Задача решалась на сетке $21 \times 31 \times 11$. Шаги по пространственным переменным и времени приняты следующими: $h_1 = h_2 = h_3 = 0.05, t = 0.0125$.

На рисунке 1а приведены осциллограммы интенсивности напряжения σ_i для характерных точек закрепленного конца $1(0, 30h_2, 0), 2(0, 30h_2, h_3), 3(0, 30h_2, 5h_3), 4(h_1, 30h_2, 0), 5(h_1, 30h_2, h_3), 6(5h_1, 30h_2, 5h_3)$. Из сравнения кривых 1–6 видно, что наибольшее значение интенсивности напряжения σ_i будет достигаться в вершине $1(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда и в точках ребра. Из кривых 1, 2, 4 видно, что уровни интенсивности напряжений в этих точках превышают значение, равное пределу упругости (0.00074), что свидетельствует о по-

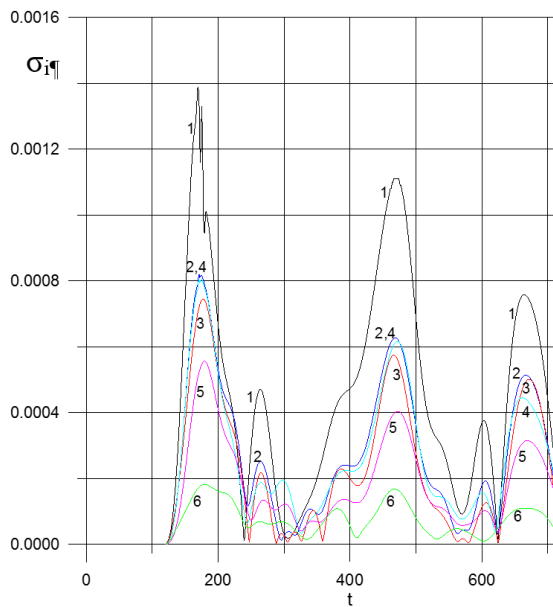


Рисунок 1а – Осциллограммы интенсивности напряжения σ_1 в характерных точках жестко-закрепленного конца 1(0,30h₂,0), 2(0,30h₂,h₃), 3(0,30h₂,5h₃), 4(h₁,30h₂,0), 5(h₁,30h₂,h₃), 6(5h₁,30h₂,5h₃)

явлении пластических деформаций. Из осциллограммы σ_1 видно, что интенсивность напряжения имеет несколько локальных убывающих по уровню экстремумов. 1-й локальный экстремум достигается в момент времени $t = 170t$ ($\sigma_1 = 0.000139$), 2-й при $t = 470t$ ($\sigma_1 = 0.000115$), 3-й при $t = 660t$

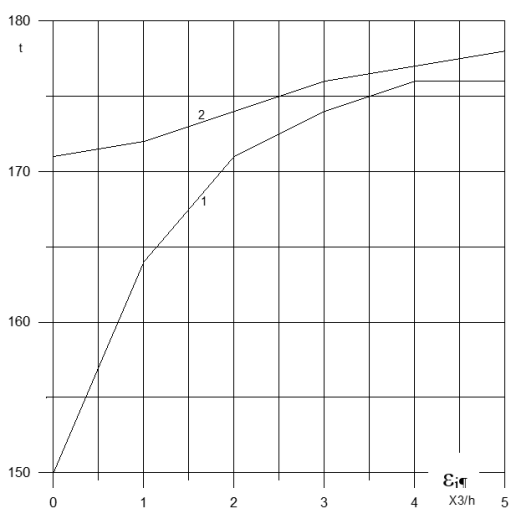


Рисунок 2а – Волновая картина для точек линии ($x_1=0, x_2=30h_2$)

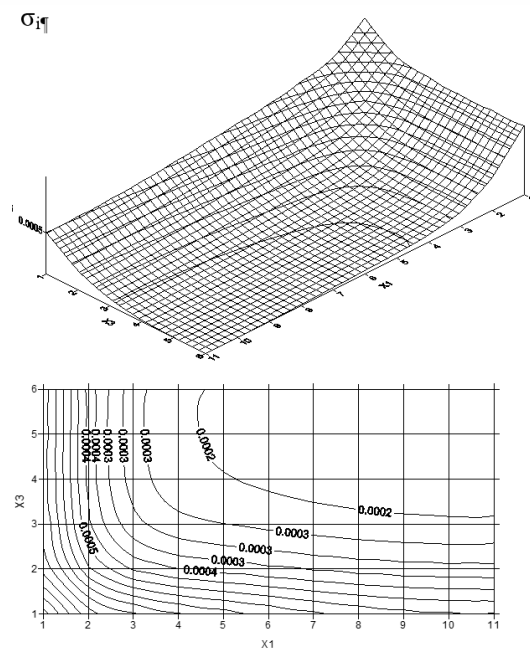


Рисунок 1б – Распределение интенсивности напряжения σ_1 в жестко-закрепленном конце в момент времени $t = 180t$

($\sigma_1 = 0.000075$). В рассматриваемом случае вторичные пластические деформации не появляются, т. к. уровни 2, 3-го локального экстремума не превышают уровень 1-го локального экстремума.

На рисунке 1б представлено распределение интенсивности напряжений $\sigma_1(x_2, x_3)$ в жестко

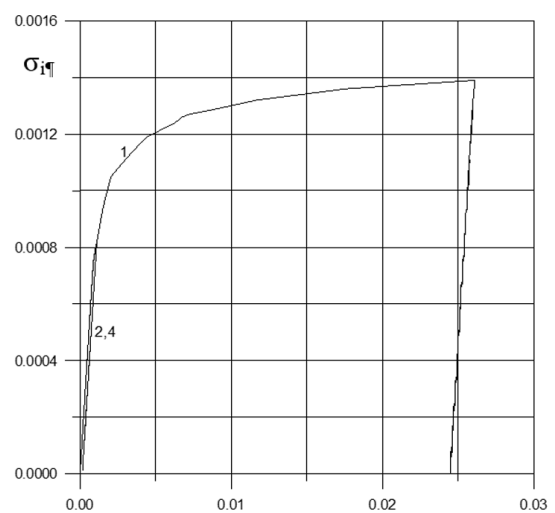


Рисунок 2б – Зависимость (σ_1, ϵ_1) в характерных точках 1(0,30h₂,0), 2(0,30h₂,h₃), 4(h₁,30h₂,0) жестко закрепленного конца

закрепленном торце $x_2 = 30h_2$ в момент времени $t = 180\tau$. Видна концентрация напряжений в угловой точке и в точках ребер.

На рисунке 2а на характеристической плоскости приведены формы изменения области пластических деформаций во времени t и в направлении оси x_3 вдоль ребра ($x_1 = 0, x_2 = 30h_2$) параллелепипеда. Линия 1 соответствует переднему фронту пластической волны, а линия 2 – волнам разгрузки. Кривая 1 показывает, что пластическое деформирование начинается с угловой точки $1(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда и распространяется вдоль ребра по направлению оси x_3 . Процесс разгрузки также начинается с угловой точки $1(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда и с возрастанием времени волна разгрузки двигается вдоль ребра ($x_1 = 0, x_2 = 30h_2$) в направлении оси x_3 последовательно разгружая следующие точки. В угловой точке $1(0, 30h_2, 0)$ параллелепипеда уровни напряжений большие по сравнению с уровнями напряжений в других точках жестко-закрепленного торца. Следует отметить, что только близлежащие к угловой точке точки ребра деформируются пластически; всё остальное вокруг, в том числе, внутренние точки этого торца деформируются упруго. Пластические области вдоль ребер в направлении оси x_3 доходит до середины сечения $x_3 = 5h_3$, а в направлении оси x_1 до $x_1 = h_1$, в направлении x_2 до $x_2 = 29h_2$. Это связано с тем, что в направлении оси x_3 параллелепипед имеет наименьшую ширину, т. е. с формой и размерами поперечного сечения.

На рисунке 2б приведена зависимость интенсивностей напряжений от интенсивности деформаций в угловой 1 $(0, 30h_2, 0)$ и двух соседних 2 $(0, 30h_2, h_3)$, 4 $(h_1, 30h_2, 0)$ точках жестко закрепленного конца. Видно, что указанные точки деформируются пластически, с течением времени в указанных точках происходит разгрузка, вторичные пластические деформации не наблюдаются.

Таким образом, с отражением упругой волны от жестко закрепленного торца в угловой точке торца появляются пластические деформации, которые развиваются в направлении ребер. Со временем волна разгрузки, также исходящая от угловой точки жестко закрепленного торца, снижает напряжение до уровня упругих напряжений.

Литература

1. *Баженов Б.Г.* О модификации схемы Уилкинса численного решения трехмерных динамических задач / Б.Г. Баженов, А.И. Кибец, А.И. Садырин // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1986. Вып. 34. С. 14–19.
2. *Киселев А.Б.* Численное исследование в трехмерной постановке процесса соударения упругопластических тел с жесткой преградой / А.Б. Киселев // Вестник МГУ. Сер. матем., механика. 1985. № 4. С. 51–55.
3. *Андрианкин Э.И.* Численная методика решения трехмерных нестационарных задач динамики упругопластических сред / Э.И. Андрианкин, В.А. Андрущенко, Н.Н. Холин // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 78. № 11. С. 1711–1718.
4. *Стебленко П.А.* Удар по трехмерному упругопластическому стержню / П.А. Стебленко // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. XI всес. конф. Новосибирск, 1990. С. 212–215.
5. *Петров И.Б.* Об использовании гибридных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела / И.Б. Петров, А.Г. Тормасов, А.С. Холодов // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30. № 8. С. 1237–1244.
6. *Булычев Г.Г.* Использование метода характеристических поверхностей в трехмерных задачах динамики изотропных упругопластических тел / Г.Г. Булычев // Прикладные аспекты анализа распределенных систем. АН СССР. М.: Ин-т физ.-техн. проблем. М., 1990. С. 41–59.
7. *Тарабин Г.Т.* Численное решение нестационарных задач динамики анизотропной упругой среды / Г.Т. Тарабин // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 83–95.
8. *Мамаев Ш.* Некоторые особенности распространения и отражения волны от закрепленного конца при продольном ударе по прямоугольному параллелепипеду / Ш. Мамаев // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физ.-мат. 2000. № 5. С. 65–73.
9. *Мамаев Ш.* Применение метода бихарактеристик к исследованию распространения упругопластических волн в параллелепипеде / Ш. Мамаев, Т.Д. Каримбаев // Механика и моделирование процессов технологии. 1995. № 1. С. 32–36.