

## ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ МЕТОДОМ ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ

*А.Ж. Жайнаков, А.Ы. Курбаналиев*

---

Представлены результаты трехмерного нестационарного моделирования течения со свободной границей, возникающего после прорыва плотины, с применением метода объема жидкости, имплементированной в пакет OpenFOAM.

*Ключевые слова:* трехмерное нестационарное моделирование; свободная граница; двухфазное течение; метод объема жидкости; OpenFOAM.

Частичное или полное разрушение плотины приводит к неконтролируемому потоку воды и, как следствие, потоплению местности вниз по потоку. Соответствующее моделирование процесса потопления местности требует высокой точности как по времени и пространству, так и по скорости. Традиционно применяемые одно- и двумерные приближения для моделирования процесса наводнения имеют недостатки по разрешению пространственных масштабов, в том числе по определению глубины и скорости потока,

времени появления фронта потока в определенной точке местности. Поэтому в последнее время предприняты несколько попыток создания численных методов описания прорыва плотины с последующим наводнением. Согласно данным нескольких авторов метод мелкой воды дает приемлемую точность по определению межфазной границы. Однако этот метод не дает приемлемую точность в начальных моментах времени, в которых важным является вертикальное движение столба жидкости из-за силы тяжести.

Полученные в данной работе численные данные сравниваются с данными других авторов. Для отслеживания положения свободной поверхности применялся метод объема жидкости, имплементированной в пакет OpenFOAM, в котором только одна фаза – воздух – является сжимаемым. В расчетах трение о твердые поверхности расчетной области пренебрегалось.

**Численное моделирование.** Используя приближение Эйлера для описания движения жидкости, можно сказать, что термодинамическое состояние определяется следующими свойствами жидкости: давление  $P$ , плотность  $\rho$ , температура  $T$  и поле скорости  $u(x,y,z)$  [1]. Во многих гидродинамических задачах, связанных с потоком воды, жидкое течение предполагается изотермическим и несжимаемым.

Упомянутая система уравнений адекватно, с приемлемой точностью описывает только однофазное течение. В рассматриваемой двухфазной гидродинамической задаче всегда присутствуют две фазы – вода и воздух. Поэтому задача моделирования многофазной системы является одной из сложных проблем вычислительной гидродинамики из-за трудности отслеживания межфазной границы с нерегулярной геометрией.

**Модель турбулентности.** В общем случае уравнения Навье – Стокса могут быть использованы для моделирования как ламинарных, так и турбулентных течений безо всяких усреднений или аппроксимаций, кроме, конечно, необходимых численных дискретизаций. Однако турбулентные течения с реалистичными числами Рейнольдса содержат большой набор различных линейных и временных масштабов, так что прямое численное моделирование должно разрешить все эти масштабы и учесть полностью диссипацию кинетической энергии турбулентности.

Такое моделирование требует существенных вычислительных затрат и большинство исследователей используют те или иные модели турбулентности для моделирования турбулентности в потоках без надобности разрешения всех масштабов. Имеются две группы подходов турбулентного моделирования:

1. Применение тех или иных методов усреднения к нестационарной системе уравнений Навье – Стокса, приводящее к усреднению уравнений Навье – Стокса по Рейнольдсу.

2. Моделирование больших вихрей, основанное на фильтрации поля течения путем прямого моделирования крупномасштабных структур (разрешаемых расчетной сеткой), которые отвечают за перенос массы и импульса, и моделирование мел-

комасштабных структур (не разрешаемых расчетной сеткой), вклад в процессы переноса которых незначительны.

**Трехмерная многофазная модель.** Как известно, в модели мелкой воды предполагается, что значения вертикальной составляющей скорости и ускорение пренебрежимо малы. Это в свою очередь приводит к гидростатическому распределению давления. Однако такое состояние несправедливо, например, для первых моментов начала движения столба жидкости вследствие силы тяжести, при которых существуют значительные вертикальные градиенты основных переменных. Если на пути движения потока жидкости присутствуют препятствия или меняется наклон дна канала, то модель мелкой воды неприемлема. Поэтому для более аккуратного описания трехмерного течения жидкости нужен другой, упрощенный подход.

Трехмерное многофазное приближение, используемое в данной работе, базируется на усредненных по Рейнольдсу полных уравнений Навье – Стокса. Для аппроксимации свободной поверхности использовался метод объема жидкости, примененный для неподвижной сетки Эйлера. При этом уравнение переноса скалярной величины используется для определения относительной объемной доли двух фаз в каждой расчетной ячейке.

Таким образом, полный набор уравнений для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u'_i u'_j}) + \sigma k \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \left/ \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right| \right.$$

где  $u_i$  – компонента средней скорости в направлении  $x_i$ ,  $\rho$  – плотность,  $p$  – среднее давление, кинематическая вязкость,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $k$  – кривизна поверхности. Усреднение производится по времени, а штрих означает флуктуационную часть. В принятой модели турбулентности используется приближение Буссинеска, согласно которому напряжения Рейнольдса  $-\overline{u'_i u'_j}$  аппроксимируются при помощи следующей формулы:  $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$ ,

где  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  и  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  – турбулентная вязкость. Кинетическая энергия турбулентности  $k$  и скорость ее диссипации  $\varepsilon$  определяются из следующих транспортных уравнений:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + v_t S^2 - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] +$$

$$+ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} v_t S^2 - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k},$$

где  $S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ , коэффициенты модели имеют следующие стандартные значения:  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ .

Объемная доля несжимаемой фазы удовлетворяет следующим условиям:

$$\gamma(x, y, z, t) = \begin{cases} 1, & \text{если контрольный объем занят водой,} \\ 0, & \text{если контрольный объем занят воздухом,} \\ 0 < \gamma < 1, & \text{если контрольный объем занят смесью воды и воздуха} \end{cases}$$

Поэтому физические свойства газожидкостной смеси определяются усреднением с соответствующим весовым коэффициентом:

$$\rho = \gamma\rho_1 + (1 - \gamma)\rho_2, \mu = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2.$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют жидкой и газовой фазам соответственно. Суть метода Volume of Fluid (VOF) заключается в том, что граница раздела двух фаз не вычисляется явно, но до некоторой степени определяется как свойство поля объемной доли воды. Так как значения объемной доли заключены между 0 и 1, фазовая граница не определяется точно, однако она занимает некоторую область, где близости должна существовать резкая межфазная граница.

Положение свободной границы определяется уравнением  $\gamma(x, y, z, t) = 0$ . Изменение свободной поверхности во времени определяется следующим скалярным уравнением переноса:  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} + u_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0$ .

**Начальные значения.** Для нестационарной задачи необходимо задание начальных значений всех зависимых переменных. Значения всех компонент скорости равны нулю, так как по условию рассматриваемой задачи до момента времени  $t = 0$

движение отсутствовало. Давление тоже равно нулю. Кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации имеют некоторое малое значение, которое обеспечивает хорошую сходимости численного решения на первых шагах интегрирования. Начальное распределение объемной доли  $\gamma$  было неоднородным (рисунок 1 б).

**Граничные условия.** На твердых стенках расчетной области задано условие прилипания, что дает условие равенства нулю всех компонент вектора скорости. Для давления и объемной доли воды заданы условия непроницаемости (условие Неймана –  $\nabla p = 0$  и  $\nabla \gamma = 0$ ); для кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  граничные условия задавались при помощи аппарата пристеночных функций. Влияние сил поверхностного натяжения между твердой стенкой и газожидкостной смесью в данной работе не учитывалось.

На свободной границе заданы нулевые значения для давления, объемной доли воды и всех компонент скорости.

**Дискретизация основных уравнений.** Дискретизация расчетной области получается методом контрольных объемов, который обеспечивает строгое соблюдение законов сохранения, и основные понятия метода напрямую соответствуют таким физическим величинам, как массовый расход, поток и т. д. [2].

В таблице 1 приведены схемы для дискретизации временных, конвективных и диффузионных членов.

В таблице 2 приведены сведения о решателях, использованных в данной работе.

Для связи уравнений скорости и давления использован метод PISO.

**Частичный прорыв плотины.** Геометрия тестовой задачи представлена на рисунке 1. Расчетное поле представляет квадратный канал с плоским дном и с асимметричной перегородкой. Слева от перегородки первоначальная высота жидкости равна 10 м, а справа – 5 м. В момент времени  $t = 0$  асимметричную перегородку длиной 75 м убрали мгновенно, и вода из-за силы гравитации устремлялась вправо.

Таблица 1 – Схемы дискретизации

Уравнение	Производная по времени	Конвективный член	Диффузионный член
Момент импульса	Euler	Gauss linear	Gauss linear corrected
Объемная доля жидкости	Euler	Gauss vanLeer	Gauss linear corrected
Кинетическая энергия турбулентности, $k$	Euler	Gauss upwind	Gauss linear corrected
Скорость диссипации энергии, $\varepsilon$	Euler	Gauss upwind	Gauss linear corrected

Таблица 2 – Решатели уравнений для основных переменных

Уравнение	Решатель	Точность
Коррекция давления	Метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, PCG	1e-10
Давление	Метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, PCG	1e-7
Скорость	Метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием, PBiCG	1e-6
Кинетическая энергия турбулентности, $k$	Метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием, PBiCG	1e-6
Скорость диссипации энергии, $\varepsilon$	Метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием, PBiCG	1e-6

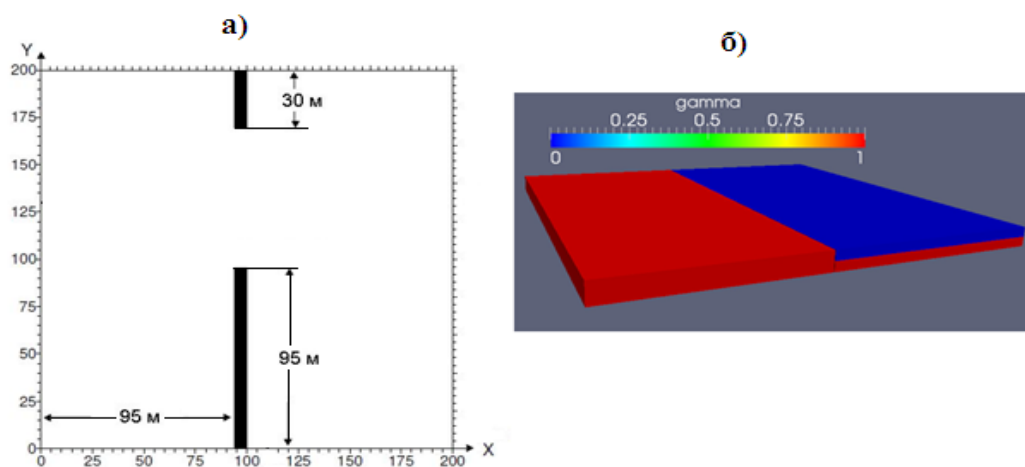


Рисунок 1 – Геометрия расчетной области и начальное поле  $\gamma$

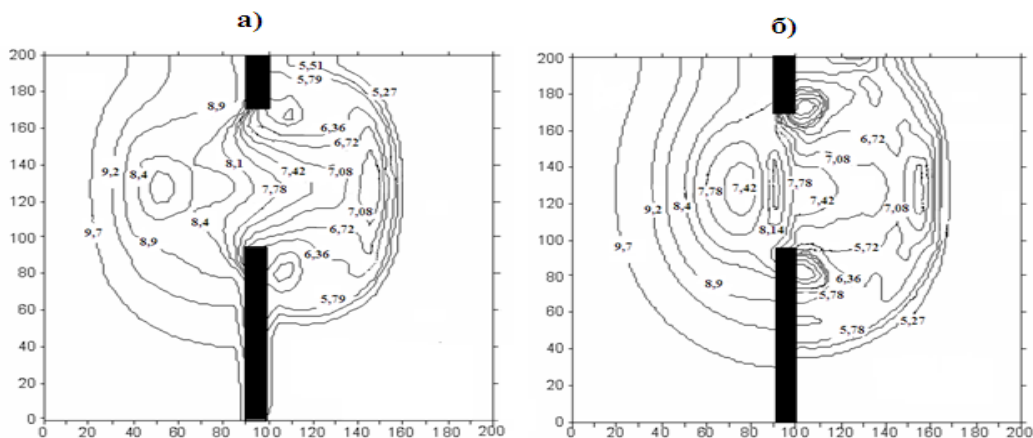


Рисунок 2 – Изолинии поверхности воды

Результаты численных расчетов сравнивали с аналогичными данными работы [3], полученными методом конечно-разностной аппроксимации урав-

нений модели мелкой воды. Как и ожидалось, имеют место существенные отличия между расчетными данными модели мелкой воды и полных уравнений

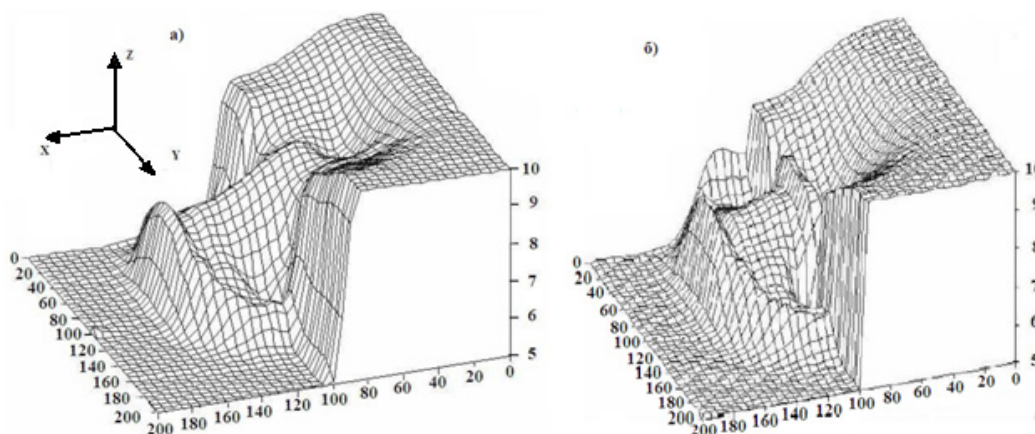


Рисунок 3 – Трехмерное распределение поверхности столба жидкости

Навье – Стокса. Модель мелкой воды не учитывает вертикальные движения. В силу этого в самом начале движения уровень поверхности воды в верхней части по потоку в непосредственной близости от перегородки завышен. Это отчетливо видно на рисунке 2, где представлены изолинии поверхности воды для модели мелкой воды (см. рисунок 2 а) и полных трехмерных уравнений Навье – Стокса (рисунок 2 б).

Такое положение, особенно в области перегородки, видно на рисунке 3, где представлены пространственное распределение поверхности столба жидкости для модели мелкой воды (рисунок 3 а) и полных уравнений Навье – Стокса (рисунок 3 б).

Таким образом, численные результаты данной работы свидетельствуют, что трехмерное моделирование усредненных по Рейнольдсу нестационарных полных уравнений Навье – Стокса наиболее детально описывает течение прорыва модельной плотины по сравнению с моделью мелкой воды.

Следовательно, этот метод может адекватно предсказать пространственную информацию о таких характеристиках рассматриваемого класса течений, как скорость и глубина потока воды, форма свободной поверхности, время достижения определенной точки местности и т. д. Однако в будущем требуется сравнение численных результатов с соответствующими экспериментальными данными.

#### Литература

1. <http://www.openfoam.org/1.7.1/docs/>. OpenFOAM 1.7.1 User's Guide.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Fennema R.J. and Chaudhry M.H. Explicit methods for two-dimensional transient free-surface flows // Journal of Hydraulic Engineering. 116 (8), 1013–1034, 1990.