УДК 517.97

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ В СЛУЧАЕ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

А.К. Керимбеков, Л.С. Красниченко

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда управление нелинейно входит в граничное условие и минимизируется кусочно-линейный функционал.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация; оптимальное управление; тепловой процесс; граничное условие.

I. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где среди допустимых управлений $u(t)\in H(0,T)$ требуется минимизировать интегральный кусочно-линейный (относительно управления) функционал

$$I\left[u(t)\right]=\int_0^1[V\left(T,x\right)-\xi(x)]^2\,dx+\beta\int_0^T\left|u(t)\right|dt,\ \ \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1]:

$$V_t=V_{xx}+f\left(t,x\right),\qquad (t,x)\in Q, \tag{2}$$

$$V\left(0,x\right)=\psi\left(x\right),\quad x\in(0,1) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$V_x\left(t,0\right)=0,\quad V_x\left(t,1\right)+\alpha V\left(t,1\right)=p\left[t,u(t)\right],\qquad 0<t<T, \tag{4}$$

где $\xi(x)\in H(0,1)$ – заданная функция, $f(t,x)\in H(Q)$ – заданная функция, описывающая изменения постоянно действующего внешнего теплового потока, а функция $p\left[t,u(t)\right]\in H\left(0,T\right)$, нелинейно зависящая от функции управления $u(t)\in H\left(0,T\right)$ описывает изменения граничного теплового источника; $\psi\left(x\right)\in H\left(0,1\right)$ – функция начального состояния управляемого процесса; постоянная α > 0; T – фиксированный момент времени; H – пространство Гильберта.

Используя методику работы [2], нетрудно показать, что функция

$$V\left(t,x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left[\ z_n\left(1\right)p_2\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]+f_n\left(\tau\right)\right]d\tau\right]z_n\left(x\right), \tag{5}$$

где ψ_n – коэффициент Фурье функции $\psi(x)$, $f_n(t)$ – функции $f(t, x)$;

$$z_n\left(x\right)=\sqrt{\frac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x$$

решение краевой задачи

$$z''\left(x\right)+\lambda^2 z\left(x\right)=0,\ z'\left(0\right)=0,\ z'\left(1\right)+\alpha z\left(1\right)=0,$$

а λ_n – корни трансцендентного уравнения $\lambda tg\left(\lambda\right)=\alpha$, удовлетворяющие условиям $\left(n-1\right)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}\left(2n-1\right), n=1,2,3\ldots$, являются слабо обобщенным решением краевой задачи (2)–(4). Заметим, что единственность решения краевой задачи (2)–(4) обеспечивается лишь при выполнении условия

$$\frac{\partial p[t,u(t)]}{\partial u}\neq 0,\forall t\in[0,T]. \tag{6}$$

В этом случае каждое управление $u(t)$ определяет единственное слабо обобщенное решение краевой задачи (2)–(4).

Управление $u^0(t)$, на котором функционал (1) принимает наименьшее возможное значение, называется оптимальным, а соответствующее ему решение краевой задачи (2)–(4)оптимальным процессом.

Пусть $u^0(t)$ является оптимальным управлением, т. е. имеет место неравенство

$$\Delta I\left[u^0\left(t\right)\right]=I\left[u^0\left(t\right)+\Delta u\left(t\right)\right]-I[u^0(t)]\geq 0,$$

где $u^0\left(t\right)+\Delta u\left(t\right)\in H\left(0,T\right)$ при любом приращении $\Delta u\left(t\right)\in H\left(0,T\right)$. Согласно методике работы [3], нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\Delta I\left[u^0\left(t\right)\right]=-\int_0^T\Delta\Pi[t,\omega\left(t,x\right),u^0\left(t\right)]dt+\int_0^1\Delta V^2\left(T,x\right)dx,$$

где $\Delta V\left(T,x\right)$ приращение функции $V\left(T,x\right)$, соответствующее приращению $\Delta u\left(t\right)$ управления $u(t)$; $\Delta\Pi[t,\omega\left(t,x\right),u^0\left(t\right)]$ – приращение функции

$$\Pi[t,\omega(t,x),u(t)]=p[t,u(t)]\omega(t,1)-\beta u^2(t); \tag{7}$$

$\omega\left(t,x\right)$ – решение сопряженной краевой задачи.

$$\omega_t+\omega_{xx}=0,(t,x)\in Q;$$

$$\omega\left(T,x\right)+2\left[V\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]=0,x\in(0,1);$$

$$\omega_x\left(t,0\right)=0,\omega_x\left(t,1\right)+\alpha\omega\left(t,1\right)=0,0<t<T.$$

Согласно методике работы [2], легко доказать, что сопряженная краевая задача имеет единственное слабо обобщенное решение:

$$\omega\left(t,x\right)=-2\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(t,1\right)\left[\int_0^T G_n\left(\tau,1\right)p\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]d\tau-h_n\right]z_n\left(x\right), \tag{8}$$

где $G_n(t,1)=e^{(-\lambda_n^2(T-t))}z_n(1),\quad h_n=\xi_n-e^{-\lambda_n^2T}\psi_n-\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}f_n\left(t\right)dt.$

Поскольку область допустимых значений управления $u(t)\in H(0,T)$ является открытым множеством, то согласно методике работы [3] легко проверить, что решение задачи

$$\Pi\left[t,\omega\left(t,x\right),u\left(t\right)\right]\to\max,\quad u\in R,\quad t\in[0,T]$$

при фиксированных t и $\omega\left(t,x\right)$ определяется соотношениями

$$p_u\left[t,u\left(t\right)\right]\omega\left(t,1\right)-2\beta u\left(t\right)=0\,, \tag{9}$$

$$p_u\left[t,u\left(t\right)\right]\bullet(u\left(t\right)p_u^{-1}\left[t,u\left(t\right)\right])>0, \tag{10}$$

где $p_u^{-1}\left[t,u\left(t\right)\right]$ – обратные функции, которые называются условиями оптимальности. Таким образом, оптимальное управление $u^0(t)$ следует искать среди функций $u(t)$, которые одновременно удовлетворяют условиям оптимальности (9) и (10).

II. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и решение задачи нелинейной оптимизации

Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности (9), (10). Учитывая (6) и (8), равенство (9) перепишем в виде

$$\beta p_u^{-1}\left[t,u\left(t\right)\right]signu\left(t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(t,1\right)\int_0^T G_n\left(\tau,1\right)p\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(t,1\right)h_n, \tag{11}$$

т. е. оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения (11). Уравнение (11) имеет специфические особенности, связанные со свойством интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Известно [4], что решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода не обладает свойством продолжаемости, т. е. решение определяется на всем отрезке [0, T]. Это обстоятельство должно учитываться при исследовании вопросов разрешимости интегрального уравнения (11).

Пусть $u\left(t\right)>0,\ t\in[0,T]$. В этом случае оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta u(t)\,p_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\int_0^T G_n(\tau,1)\,p\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\,h_n \qquad (11_+)$$

только положительного знака, кроме того, удовлетворяющее дополнительному условию (10).

Если $u(t)<0,\ t\in[0,T]$, то оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$-\beta u(t)\,p_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\int_0^T G_n(\tau,1)\,p\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\,h_n \qquad (11_-)$$

только отрицательного знака, кроме того, удовлетворяющее дополнительному условию (10).

Исследования однозначной разрешимости интегральных уравнений можно проводить согласно методике работы [5].

Например, рассмотрим уравнение (11_+). Положим

$$\beta u(t)\,p_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=\theta(t). \qquad (12)$$

Это равенство, согласно (10), однозначно разрешается относительно $u(t)$, т. е. существует функция $\varphi(\bullet)$ такая, что

$$u(t)=\varphi[t,\theta(t),\beta]. \qquad (13)$$

Согласно (12) и (13), уравнение (11_+) приводим к виду

$$\theta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\int_0^T G_n(\tau,1)\,p\left[\tau,\varphi[\tau,\theta(\tau),\beta]\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\,h_n. \qquad (14)$$

Теорема: Пусть функции $p\left[t,u(t)\right]$ и $\varphi[\tau,\theta(\tau),\beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т. е.

$$\left\|p\left[t,u(t)\right]-p\left[t,\bar u(t)\right]\right\|_H\le p_0\left\|u(t)-\bar u(t)\right\|_H,\quad p_0>0,$$

$$\left\|\varphi[t,\theta(t),\beta]-\varphi[t,\bar\theta(t),\beta]\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\left\|\theta(t)-\bar\theta(t)\right\|_H,\quad \varphi_0(\beta)>0,$$

и

$$\frac{\partial p[t,u(t)]}{\partial u}\ne 0,\forall t\in\left[0,T\right].$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=M_1 f_0\varphi_0(\beta)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<1$$

уравнение (14) в пространстве *H(0,T)* имеет единственное решение: $\tilde\theta(t)\in H(0,T)$.

Доказательство. Вводим оператор $G[\bullet]$, действующий по формуле

$$G[\theta]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,1)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau,1)\,p\left[\tau,\varphi\left[\tau,\theta(\tau),\beta\right]\right]d\tau\right],$$

и уравнение (14) перепишем в операторной форме:

$$\theta=G[\theta]. \qquad (15)$$

Непосредственным вычислением доказывается, что оператор $G[\bullet]$ переводит любой элемент пространства *H(0,T)* снова в элемент этого же пространства, т. е. если $\theta(t)\in H(0,T)$., то $G\left[\theta(t)\right]\in H(0,T)$. При выполнении условия $\gamma<1$ оператор $G[\bullet]$ является сжимающим и на основе теоремы о сжимающем операторе [6] уравнение (15) в пространстве *H(0,T)* имеет единственное решение $\tilde\theta(t)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений

$$\theta_n(t)=G\left[\theta_{n-1}(t)\right],\quad n=1,2,3,\ldots,$$

и удовлетворяет оценке

$$\left\|\tilde\theta(t)-\theta_n(t)\right\|_H\le\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\theta_0(t)\right]-\theta_0(t)\right\|_H, \qquad (16)$$

где $\theta_0(t)$ – произвольный элемент пространства *H(0,T)*.

Далее подставляя $\tilde{\theta}(t)$ в (13) получим "оптимальное" управление

$$u_{+}^{0}(t)=\phi\left[t,\tilde{\theta}(t),\beta\right]. \tag{17}$$

Это управление должно быть положительного знака для всех $t\in[0,T]$,
за исключением точек множества меры "ноль". Неравенство $u_{+}^{0}(t)=\phi\left[t,\tilde{\theta}(t),\beta\right]>0,\quad t\in[0,T]$ (17')
может иметь место не для любого $\beta>0$. Поэтому при исследовании необходимо выявить те интервалы значений параметра , для которых имеет место неравенство (17'). Такие интервалы назовем "интервалами разрешимости". Если "интервал разрешимости" пустое множество, то интегральное уравнение не имеет решения, обладающего требуемым свойством. Поэтому это обстоятельство является одним из существенных факторов в вопросе существования решения интегрального уравнения (11_{+}) положительного знака.

Предположим, что управление (17) – решение интегрального уравнения положительного знака. Тогда подставляя управление $u_{+}^{0}(t)$ в (5) находим оптимальный процесс:

$$V_{+}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left[f_n(\tau)+z_n(1)p\left[\tau,u_{+}^{0}(\tau)\right]\right]d\tau\right]z_n(x). \tag{18}$$

Подставляя оптимальное управление $u_{+}^{0}(t)$ и оптимальный процесс, в (1) вычислим минимальное значение функционала $I[u]$, т. е.

$$I\left[u_{+}^{0}(t)\right]=\int_0^1[V_{+}^{0}(T,x)-\xi(x)]^2dx+\beta\int_0^T\left|u_{+}^{0}(t)\right|dt.\quad \beta>0. \tag{19}$$

Таким образом, найденная тройка $(u_{+}^{0}(t),V_{+}^{0}(t,x),I\left[u_{+}^{0}(t)\right])$ является одним из решений задачи нелинейной оптимизации. Аналогичным образом, для случая $u(t)<0, t\in[0,T]$ находим другое решение в виде следующей тройки: $(u_{-}^{0}(t),V_{-}^{0}(t,x),I\left[u_{-}^{0}(t)\right])$. Сравнивая значения $I\left[u_{+}^{0}(t)\right]$ и $I\left[u_{-}^{0}(t)\right]$, находим искомое решение задачи нелинейной оптимизации. Этим решением является та тройка, у которой функционал принимает значение меньшее, чем у другой.

III. Приближенное решение задачи оптимизации. Поскольку найти точное решение уравнения (15) не всегда удается, на практике ограничиваются нахождением приближенного решения, которое определяется с учетом заданной точности. В зависимости от требуемой точности число n определяется, согласно оценке (16).

Подставляя *k*-е приближенное решение $\theta_k(t)$ уравнения (15), в (17) вместо $\theta(t)$, находим *k*-е приближение оптимального управления

$$u_k(t)=\varphi[t,\theta_k(t),\beta]. \tag{20}$$

При этом допускаемая погрешность оценивается неравенством

$$\begin{aligned}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|&=\left\|\varphi\left[t,\theta(t),\beta\right]-\tilde{\varphi}\left[t,\theta_k(t),\beta\right]\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\left\|\theta(t)-\theta_k(t)\right\|_H\le\\&\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\theta_0(t)\right]+\hbar(t)-\ \theta_0(t)\right\|_H.\end{aligned} \tag{21}$$

Построенное *k*-е приближение оптимального управления, подставляя в (4), находим k-е приближение оптимального процесса:

$$V_k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}(f_n(\tau)+z_n(1)p\left[\tau,u_k(\tau)\right])d\tau\right]z_n(x). \tag{22}$$

Согласно (18) и (22) непосредственным вычислением находим, что допускаемая погрешность оценивается неравенством

$$\left\|V(t,x)-V_k(t,x)\right\|_H\le\left[2TM_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)p_0\right]^{1/2}p_0\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\cdot\left\|G_0\left[\theta_0(t)\right]+\hbar(t)-\ \theta_0(t)\right\|_H. \tag{23}$$

Подставляя приближенное управление и приближенный оптимальный процесс в (19), вычислим *k*-е приближение минимального значения функционала по формуле

$$I\left[u_k(t)\right]=\int_0^1[V_k(T,x)-\xi(x)]^2\,dx+2\beta\int_0^T\left|u_k(t)\right|^2 dt. \tag{24}$$

Согласно (19) и (23) непосредственным вычислением находим, что допускаемая погрешность оценивается неравенством

$$\left|I\left[u(t)\right]-I\left[u_k(t)\right]\right|\le$$

$$\left\{\left(\left\|V(T,x)+V_k(T,x)\right\|_H+2\left\|\xi(x)\right\|_H\right)\cdot\left[2TM_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right]^{1/2}p_0\right\}* \tag{25}$$

$$*\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\theta_0(t)\right]+\hbar(t)-\ \theta_0(t)\right\|_H.$$

Таким образом, k-е приближение задачи нелинейной оптимизации определяется согласно формулам (20), (22) и (24), которое, как следует из оценок (21), (23) и (25), при $k\to\infty$ сходится к точному решению, определяемому формулами (17), (18) и (19).

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической функции / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Серия Vfntvfnbrf. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
5. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков. Институт математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
6. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М., 1965. 520 с.