УДК 512.7:514.7 (575.2) (04)

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ДЛЯ ДЕЙСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

К.К. Муминов, Р. Гаффоров

Дается критерий эквивалентности путей для действия специальной псевдоортоганальной группы $SO(p,q)$ и указываются необходимые и достаточные условия, восстанавливающие путь с точностью до эквивалентности относительно действия группы $SO(p,q)$.

Ключевые слова: псевдоортогональная группа; действия группы; регулярный путь.

Пусть $E = R^n$ – вещественное *n*-мерное векторное пространство; $GL(n,R)$ – группа всех обратимых линейных преобразований пространства *E*; $O(p,q)$ – подгруппа всех псевдоортогональных преобразований пространства *E*, т.е. $O(p,q) = \left\{ g \in GL(n,R) : g^T I\, g = I \right\}$, где g^T – транспонированная матрица к g, $I = (I_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $I_{ij} = 1$ при $i = j = \overline{1,p}$, $I_{ij} = -1$ при $i = j = \overline{p+1,n}$, $I_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $p + q = n$, p,q – натуральные числа. Рассмотрим специальную псевдоортогональную группу $SO(p,q) = \left\{ g \in O(p,q) : \det g = 1 \right\}$ и ее естественное действие $(g,x) \to gx$ на векторном пространстве *E*.

Непрерывное отображение $x(t)$ из [0,1] в *E* называется путем. Если координаты $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ пути $x(t)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на [0,1], то говорят, что $x(t) - C^\infty$ – путь. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются $SO(p,q)$ – эквивалентными, если существует такой элемент $g \in SO(p,q)$, что $y(t) = gx(t)$ для любого $t \in [0,1]$.

Для каждого C^∞ – пути $x(t) = (x_j(t))_{j=1}^{n}$ через $M(x)$ обозначим $n \times n$ матрицу $(x\, x' \ldots \overset{(n-1)}{x})$, где *i*-ый столбец имеет координаты $\overset{(i-1)}{x_j}(t)$, здесь $\overset{(i-1)}{x_j}(t) - (i-1)$ – производная от $x_j(t), i, j = \overline{1,n}$. Через $M'(x)$ обозначается матрица $(x' x'' \ldots \overset{(n)}{x})$. В дальнейшем рассматриваются только регулярные пути, т.е. C^∞ – пути $x(t)$, для которых определитель $\det M(x)(t) \neq 0$ при всех $t \in [0,1]$.

Теорема 1. Два пути $x(t)$, $y(t)$ – $SO(p,q)$ – эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства: 1) $(M(x))^{-1} M'(x) = (M(y))^{-1} M'(y)$; 2) $M^T(x) I\, M(x) = M^T(y) I\, M(y)$; 3) $\det M(x) = \det M(y)$.

Доказательство. Если пути $x(t)$ и $y(t)$ – $SO(p,q)$ – эквивалентны, то существует такое $g \in SO(p,q)$, что $y(t) = g\,x(t)$. Тогда $M(y) = gM(x)$ и поэтому

$(M(y))^{-1}M'(y) = (gM(x))^{-1}(gM(x))' = (M(y))^{-1}g^{-1}gM'(x) = (M(x))^{-1}M'(x).$

$M^T(y)I\,M(y) = (gM(x))^T I\,gM(x) = M^T(x)g^T I\,gM(x) = M^T(x)I\,M(x).$

$\det M(y) = \det gM(x) = \det g \det M(x) = \det M(x).$

Обратно, пусть для путей $x(t)$, $y(t)$ выполняются соотношения 1), 2), 3). Если $A = A(t)$ – обратимая матрица, то из равенств $AA^{-1} = E$ вытекает, что $A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0$, или $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$. Используя это равенство, перепишем 1) в виде: $(M(y)M^{-1}(x))' = 0$, отсюда следует, что $M(y)M^{-1}(x) = g \in GL(n,R)$, т.е. $M(y) = gM(x)$, в частности, $y = g\,x$. Учитывая равенство 3) и равенство $\det M(y) = \det g \det M(x)$, получим, что $\det g = 1$. Кроме того, из равенства $(M(y)M^{-1}(x))^T I\,M(y)M^{-1}(x) = I$ вытекает, что $g \in SO(p,q)$. Теорема доказана.

Для регулярного пути $x(t)$ рассмотрим матрицы из $GL(n,R)$ вида $A = A(t) = (M(x))^{-1}M'(x) = \|a_{ij}(t)\|$, $B = B(t) = M^T(x)IM(x) = \|b_{ij}(t)\|$, и числовую функцию $c(t) = \det M(x)(t)$. Нетрудно проверить, что матрицы и *A*, *B* и функция $c(t)$ удовлетворяют следующим соотношениям: *a)* $B' = A^T B + BA$; b) Матрица *B* – невырождена, $B^T = B$ и *B* конгруентна матрице *I*, т.е. существуют такие $h = h(t) \in GL(n,R)$, что $B = h^T I\,h$; c) Функции $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$ – бесконечно дифференцируемы на [0,1]; *d)* $a_{ij} = 1$, если $i = j-1$, $j = \overline{2,n}$, $a_{ij} = 0$, если $j \neq n$ или $i \neq j-1$, $j = \overline{2,n}$; e) $c_t'(t) = a_{nn}(t)\cdot c(t)$, $c(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$.

Теорема 2. Пусть заданы матрицы $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$, $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$ из $GL(n,R)$ и функция $c(t)$, удовлетворяющие соотношениям $a),...,e)$. Тогда существует единственный с точностью до $SO(p,q)$ – эквивалентности путь $x(t)$, удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M^{-1}(x)M'(x)(t) = A(t) \\ M^T(x)I\,M(x)(t) = B(t) \\ \det M(x)(t) = c(t) \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство. Первое уравнение системы (1) равносильно уравнению $M'(x) = M(x)A(t)$. В силу условия *d)* имеем, что

$$\begin{cases} \overset{(n)}{x_1}(t) - a_{nn}(t)\overset{(n-1)}{x_1}(t) - ... - a_{2n}(t)x_1'(t) - a_{1n}(t)x_1(t) = 0 \\ .... \\ \overset{(n)}{x_n}(t) - a_{nn}(t)\overset{(n-1)}{x_n}(t) - ... - a_{2n}(t)x_n'(t) - a_{1n}(t)x_n(t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Решениями $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ системы (2) служит фундаментальная система решений следующего дифференциального уравнения (см. [1]):

$$\overset{(n)}{y} - a_{nn}(t)\overset{(n-1)}{y} - ... - a_{2n}(t)y' - a_{1n}(t)y = 0. \tag{3}$$

Известно, что существуют линейно независимые решения $x_1^0(t), x_2^0(t), ..., x_n^0(t)$ для уравнения (3), при этом $\det M(x^0)(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$ [1: 142]. Положим $x^0(t) = \left(x_1^0(t), x_2^0(t), ..., x_n^0(t)\right)$. Тогда $x^0(t)$ есть путь, для которого $M(x^0)$ удовлетворяет первому уравнению системы (1).

Пусть $X(t) = \left(x_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^n$ – другое решение первого уравнения системы (1). Так как $X'(t) = X(t)A(t)$, то, используя вид матрицы *A*, получим, что $X(t) = M\left(x(t)\right)$ для пути $x(t) = \left(x_{11}(t), x_{21}(t), ..., x_{n1}(t)\right)$. Так как $M^{-1}(x)M'(x) = A(t)$, то $\left(M(x)M^{-1}(x^0)\right)' = 0$, т.е. $M(x)M^{-1}(x^0) = g \in GL(n,R)$. Это означает, что $M(x) = gM(x^0)$, в частности $x = gx^0$.

Используя условие a) получим, что $\left(\left(M^{-1}(x_0)\right)^T BM^{-1}(x_0)\right)' = 0$, т.е. $D = \left(M^{-1}(x_0)\right)^T BM^{-1}(x_0) \in GL(n,R)$. Согласно условию *b)* матрица *D* – невырожденная и симметрическая. Так как матрица *B* конгруэнтна матрице *I*, то матрица *D* тоже конгруэнтна матрице *I*, т.е. существует такая матрица $g_0 \in GL(n,R)$, что $\left(M^{-1}(x_0)\right)^T BM^{-1}(x_0) = D = g_0^T I g_0$. Таким образом, $B = (g_0 M(x_0))^T I g_0 M(x_0)$, т.е. для $y_0 = g_0 x_0$ имеем, что $M(y_0)$ есть невырожденное решение для первых двух уравнений системы (1).

Из первого уравнения системы (1) и условий *d*), *e*) вытекает, что $a_{nn}(t) = \frac{(\det M'(y_0))(t)}{(\det M(y_0))(t)} = \frac{c_t'(t)}{c(t)}$.

Обозначая $u(t) = \left(\det M(y_0)\right)(t)$, получим, что $\frac{c_t'(t)}{c(t)} = \frac{u_t'(t)}{u(t)}$, т.е. $\frac{c_t' \cdot u - c u_t'}{u^2} \cdot \frac{u}{c} = 0$, или $\left(\frac{c}{u}\right)_t' \cdot \left(\frac{c}{u}\right)^{-1} = 0$. Следовательно, $\frac{c}{u} = const = c_0$, т.е. $c(t) = c_0\left(\det M(y_0)\right)(t)$. Если положим $x = g_1 y_0$, где $g_1 \in O(p,q)$, $\det g_1 = c_0$, то для $M(x)(t)$ выполняются все уравнения системы (1), т.е. существует невырожденное решение системы (1). Если z_0 – одно из этих решений, то $z = g z_0$ будет общим решением этой системы тогда и только тогда, когда $g \in SO(p,q)$.

Замечание. Аналогичные задачи для действия симплектической и псевдоортогональной группы рассмотрены в работах [2, 3] соответственно.

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновеанные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.
2. *Муминов К.К.* Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы // Известия вузов. Математика. – 2002. – №7. – С. 27–38.
3. *Муминов К.К.* Эквивалентность путей для действия псевдоортогональной группы // Bulletin of “TINBO”. – Ташкент: Истиклол, 2006. – №1. – С. 25–28.