

УДК 517.97 (575.2) (04)

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ  
ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ**

*А. Керимбеков, Т.Ю. Урывская*

Исследованы вопросы разрешимости задач нелинейного оптимального управления тепловыми и диффузионными процессами, описываемыми полулинейным параболическим уравнением. Установлено, что оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения сложной структуры с дополнительным условием в виде дифференциального неравенства.

*Ключевые слова:* полулинейные параболические уравнения; слабо обобщенное решение; условия оптимальности; дифференциальное неравенство нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.

**I. Краевая задача управляемого процесса и ее решение**

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый скалярной функцией  $V(t, x)$ , которая в области  $Q_T = Q \times (0, T)$  удовлетворяет полулинейному параболическому уравнению [1]

$$V_t - AV = \varphi[t, x, V(t, x)] + g(x)f[t, u(t)], \quad (1)$$

а на границе  $Q_T$  начальным

$$V(0, X) = \psi(x), \quad x \in Q \quad (2)$$

и граничному

$$\Gamma V(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x) \cos(\nu, x_i) + a(x)V(t, x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T \quad (3)$$

условиям. Здесь  $\varphi[t, x, V(t, x)]$  – заданная функция, нелинейно зависящая от состояния управляемого процесса  $V(t, x) \in H(Q_T)$ ;  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$  – заданная функция внешнего воздействия, нелинейно зависящая от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$ ;  $Q$  – ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с кусочно-гладкой границей  $\gamma$ ;  $\nu$  – внешняя нормаль в точке  $x \in \gamma$ ;  $g(x) \in H(Q)$ ,  $\psi(x) \in H(Q)$  заданные функции; оператор  $A$ , действующий по формуле

$$AV(t, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x))_{x_j} - c(x)V(t, x), \quad (4)$$

является эллиптическим в замкнутой области  $\bar{Q} = Q \cup \gamma$ ;  $a(x) \geq 0$ ;  $c(x) \geq 0$  – ограниченные измеримые функции;  $H$  – гильбертово пространство;  $T$  – фиксировано.

Пусть  $\psi_n$  и  $g_n$  – коэффициенты Фурье соответственно функций  $\psi(x)$  и  $g(x)$ ;  $\{z_n(x)\}$  – полная в  $H(Q)$  ортонормированная система собственных функций краевой задачи [2]

$$\begin{aligned} Az(x) &= -\lambda z(x), \quad x \in Q, \\ \Gamma z(x) &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

а  $\{\lambda_n\}$  – соответствующая последовательность собственных значений, причем  $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

**Определение 1.1.** Любая функция  $V(t, x) \in H(Q_T)$ , которая при каждом фиксированном управлении  $u(t) \in H(Q_T)$  удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_Q \varphi[\tau, \xi, V(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau + \int_0^t g_n e^{-\lambda_n(t-\tau)} f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x) \quad (6)$$

называется слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(4). Исследуем вопросы существования единственного обобщенного решения нелинейного интегрального уравнения (6).

**Лемма 1.1.** Функция

$$h(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n e^{-\lambda_n t}] z_n(x) \quad (7)$$

является элементом пространства  $H(Q_T)$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $\varphi(\cdot, V)$  такая функция, что при любом  $V(t, x) \in H(Q_T)$  она является элементом пространства  $H(Q_T)$ . Тогда оператор  $K_0[V]$ , действующий по формуле

$$K_0[V(t, x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_Q \varphi[\tau, \xi, V(\tau, \xi)] z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \quad (8)$$

отображает пространство  $H(Q_T)$  в себя.

**Лемма 1.3.** Пусть  $f(t, u(t))$  такая функция, что при любом управлении  $u(t) \in H(0, T)$  она является элементом пространства  $H(0, T)$ . Тогда оператор  $F[t, x, u(t)]$ , действующий по формуле:

$$F[t, x, u(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau z_n(x). \quad (9)$$

отображает пространство  $H(0, T)$  в пространство  $H(Q_T)$ .

Теперь интегральное уравнение (1.6) согласно представлениям (7), (8) и (9) перепишем в операторной форме

$$V = K[V], \quad (10)$$

где оператор

$$K[V] = h + K_0[V] + F$$

в силу лемм 1.1–1.3 при любом фиксированном  $u(t) \in H(0, T)$  отображает пространство  $H(Q_T)$  в себя.

**Теорема 1.1.** Пусть функция  $\varphi[t, x, V(t, x)]$  при любом  $V(t, x) \in H(Q_T)$  является элементом пространства  $H(Q_T)$  и удовлетворяет условию

$$\varphi_0 = \sup_{(t, x) \in H(Q)} \left| \frac{\partial \varphi[t, x, V]}{\partial V} \right| \neq 0. \quad (11)$$

Тогда при выполнении условия

$$\lambda_0 T \varphi_0 < 1 \quad (12)$$

операторное уравнение (1.10) имеет единственное решение в пространстве  $H(Q_T)$ .

Решение может быть найдено методом последовательных приближений [4]

$$V_n(t, x) = K[V_{n-1}(t, x)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где нулевое приближение  $V_0(t, x)$  является произвольным элементом пространства  $H(Q_T)$ . При этом приближенное решение  $V_n(t, x)$  удовлетворяет оценке

$$\|V(t, x) - V_n(t, x)\|_{H(Q_T)} \leq \frac{(T\lambda_0\varphi_0)^n}{1 - T\lambda_0\varphi_0} \|K[V_0] - V_0\|_{H(Q_T)}. \quad (13)$$

Заметим, что между элементами пространства управлений  $H(0, T)$  и пространства состояний  $H(Q_T)$  взаимно однозначное соответствие имеет место лишь в случае, когда

$$\frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \neq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (14)$$

Поэтому отображение  $u(t) \rightarrow V(t, x)$  является однозначным лишь при выполнении условий (11) и (14).

## II. Задача оптимального управления и условия оптимальности

Пусть управляемый процесс  $V(t, x)$  описывается краевой задачей (1)–(4).

*Задача нелинейной оптимизации.* Рассмотрим нелинейную задачу оптимального управления.

Пусть функции  $S[t, x, V]$ ,  $P[t, u]$ ,  $\Phi[V(T, x)]$  заданы и обладают следующими свойствами:

- (i) функция  $S[t, x, V]$  – непрерывна и имеет производную  $\frac{\partial S}{\partial V} \in H(Q_T)$ ;
- (ii) функция  $P[t, u(t)]$  интегрируема на  $[0, T]$  и имеет производную  $\frac{\partial P}{\partial u} \in H(0, T)$ ;
- (iii) функция  $\Phi[V]$  интегрируема по области  $Q$  и имеет производные  $y_n, \frac{\partial \Phi}{\partial V} \in H(Q)$ .

Требуется найти допустимую пару  $(u^0(t), V^0(t, x)) \in H(0, T) \times H(Q_T)$ , на которой функционал

$$J[u(t)] = \int_0^T \int_Q S[t, x, V(t, x)] dx dt + \int_0^T P[t, u(t)] dt + \int_Q \Phi[V(T, x)] dx \quad (15)$$

принимает наименьшее возможное значение.

**Теорема 2.1.** Пусть функции  $P[t, u]$  и  $f[t, u]$  имеют производные  $\frac{\partial P(t, u)}{\partial u} \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 P(t, u)}{\partial u^2} \in H(0, T)$  и  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial u} \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial u^2} \in H(0, T)$ .

Для того чтобы допустимая пара  $(u(t), V(t, x)) \in H(0, T) \times H(Q_T)$  была оптимальной необходимо, чтобы функция

$$\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), u(t)] = \int_Q g(x) \omega(t, x) dx f[t, u(t)] - P[t, u(t)], \quad (16)$$

где  $\omega(t, x)$  обобщенное решение краевой задачи

$$\omega_t + A\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial V} \omega = \frac{\partial S}{\partial V}, \quad x \in Q, 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

$$\omega(T, x) - \frac{\partial \Phi[V]}{\partial V} = 0, \quad x \in Q, \quad (18)$$

$$\Gamma \omega(t, x) = 0, \quad x \in \gamma, 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

почти всюду на  $[0, T]$  удовлетворяла соотношению

$$\Pi[t, x, V^0(t, x), \omega(t, x), u^0(t)] = \sup_{u \in D} \Pi[t, x, V^0(t, x), \omega(t, x), u], \quad (20)$$

где  $D$  – открытое множество допустимых значений  $u$ .

Доказательство теоремы приводить не будем, так как оно следует из известных теорем о принципе максимума для систем с распределенными параметрами [3, 4].

Согласно (16) и (20), как следствие получаем следующие соотношения:

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} - \frac{\partial P(t,u)}{\partial u} = 0, \quad (21)$$

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx \frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P(t,u)}{\partial u^2} < 0, \quad (22)$$

которые выполняются только на оптимальном управлении  $u^0(t)$ . С учетом условия (14) равенство (21) перепишем в виде:

$$\frac{\partial P[t,u]}{\partial u} \left( \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} \right)^{-1} = \int_Q g(x)\omega(t,x)dx. \quad (23)$$

На основе этого равенства условие (22) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial f[t,u]}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial P(t,u)}{\partial u} \left( \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} \right)^{-1} \right) > 0. \quad (24)$$

Таким образом, оптимальное управление  $u^0(t)$  следует находить из системы соотношений (23) и (24), которые называются условиями оптимальности.

### III. Сопряженная краевая задача и ее решение

Рассмотрим краевую задачу (17)–(19), сопряженную с краевой задачей (1)–(4).

**Определение 3.1.** Любая функция  $\omega(t,x) \in H(Q_T)$ , которая при каждой допустимой паре  $(u(t), V(t,x)) \in H(0,T) \times H(Q_T)$  удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \omega(t,x) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)} \int_Q \frac{\partial \varphi[\tau,\xi,V(\tau,\xi)]}{\partial V} \omega(\tau,\xi) z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)} \int_Q \frac{\partial S[\tau,\xi,V(\tau,\xi)]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\lambda_n(T-t)} \int_Q \frac{\partial \Phi[V]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi \right) z_n(x), \end{aligned} \quad (25)$$

называется обобщенным решением сопряженной краевой задачи (17)–(19).

Исследуем вопросы однозначной разрешимости линейного интегрального уравнения (25).

**Лемма 3.1.** Функция

$$y_1(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\lambda_n(T-t)} \int_Q \frac{\partial \Phi[V]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi \right) z_n(x) \quad (26)$$

является элементом пространства  $H(Q_T)$ .

**Лемма 3.2.** Функция

$$y_2(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)} \int_Q \frac{\partial S[\tau,\xi,V(\tau,\xi)]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \quad (27)$$

является элементом пространства  $H(Q_T)$ .

**Лемма 3.3.** Для любой функции  $\omega(t,x) \in H(Q_T)$  оператор  $G_0[t,x,\omega(t,x)]$  действующий по формуле

$$G_0[t,x,\omega(t,x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-\lambda_n(\tau-T)} \int_Q \frac{\partial \varphi[\tau,\xi,V]}{\partial V} \omega(\tau,\xi) z_n(\xi) d\xi d\tau z_n(x) \quad (28)$$

отображает пространство  $H(Q_T)$  в себя.

Теперь интегральное уравнение (25), согласно представлениям (26), (27) и (28), перепишем в операторной форме:

$$\omega = G[\omega], \quad (29)$$

где оператор

$$G[\omega] = G_0[\omega] - y_2 - y_1 \quad (30)$$

в силу лемм (25)–(27), отображает пространство  $H(Q_T)$  в себя.

**Теорема 3.1.** Операторное уравнение (29) при выполнении условий (13) и (14) имеет единственное решение в пространстве  $H(Q_T)$ .

Решение может быть найдено методом последовательных приближений [3].

$$\omega_n(t, x) = G[\omega_{n-1}(t, x)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\omega_0(t, x)$  является произвольным элементом пространства  $H(Q_T)$ . Приближенное решение  $\omega_n(t, x)$  удовлетворяет оценке

$$\|\omega(t, x) - \omega_n(t, x)\|_{H(Q_T)} \leq \frac{(T\lambda_0\varphi_0)^n}{1 - T\lambda_0\varphi_0} \|G[\omega_0] - \omega_0\|_{H(Q_T)}.$$

#### IV. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Оптимальное управление  $u^0(t)$  находим согласно условиям оптимальности (23) и (24). Учитывая представление (25), равенство (23) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P[t, u]}{\partial u} \left( \frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \right)^{-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)} \int_Q \frac{\partial S[\tau, \xi, V]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi d\tau - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)} \int_Q \frac{\partial \varphi[\tau, \xi, V]}{\partial V} \omega(\tau, \xi) z_n(\xi) d\xi d\tau - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(T-t)} g_n \int_Q \frac{\partial \Phi[V(T, \xi)]}{\partial V} z_n(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$V(t, x) = R(t, x, f[t, u(t)]) \quad (32)$$

– решение нелинейного интегрального уравнения (6). В (31) заменяя  $V(t, x)$  на  $R(t, x, f[t, u(t)])$ ,

получим нелинейное интегральное уравнение

$$\frac{\partial P[t, u]}{\partial u} \left( \frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \right)^{-1} = B(t, f[t, u(t)]), \quad (33)$$

где оператор  $B[\cdot]$  имеет сложную структуру. Оптимальным управлением  $u^0(t)$  может быть решение уравнения (33), удовлетворяющее дополнительному условию (24). Таким образом, в процессе исследования нелинейных задач оптимального управления колебательными процессами, описываемыми полулинейными параболическими уравнениями, возникает своеобразная новая задача (33), (24) теории нелинейных интегральных уравнений. Эта задача почти не исследована.

Согласно методике [4], для исследования уравнения (33), сначала его преобразуем. Положим

$$\frac{\partial P[t, u(t)]}{\partial u} \left( \frac{\partial f[t, u(t)]}{\partial u} \right)^{-1} = \theta(t). \quad (34)$$

В силу условия (24) это равенство однозначно разрешается относительно управления  $u(t)$  и существует функция  $\mu(\bullet)$  такая, что

$$u(t) = \mu[t, \theta(t)] \quad (35)$$

Согласно (34) и (35) уравнение (33) перепишем в виде

$$\theta(t) = B\left(t, f\left[t, \mu\left[t, \theta(t)\right]\right]\right). \quad (36)$$

Это уравнение может быть исследовано методами нелинейного анализа [5].

Пусть  $\theta(t)$  решение уравнения (36). Это решение подставим в (35) и находим управление, которое является решением уравнения (33). Сложность, возникающая при определении оптимального управления  $u^0(t)$ , заключается еще и в том, что на этом решении должно выполняться дополнительное условие (24).

Если найдено оптимальное управление, то оптимальный процесс  $V^0(t, x)$  находим по формуле (32). Далее  $u^0(t)$  и  $V^0(t, x)$  поставим в (15) и вычислим минимальное значение функционала  $J[u^0]$ .

Таким образом, найденная тройка  $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$  является решением задачи оптимизации.

### ***Литература***

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – Т. 32. – №4. – С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 132 с.
5. *Люстерник Л.Н., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.