

## ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНОЙ АНТЕННЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

*Т.Б. Бекболотов, А.Г. Шубович*

---

Антенны подвергаются различным механическим воздействиям и представляют собой многослойные конструкции, на которые действуют векторные нагрузки.

*Ключевые слова:* антенна; многослойная конструкция; векторная нагрузка; метод Риза.

В настоящее время разработан целый ряд концепций многослойных конструкций. Анализ опубликованных работ свидетельствует, что появление технологий создания многослойных антенн и повышенные требования к их конструктивным и эксплуатационным свойствам, что появились определенные требования к разработкам новых прикладных методов, отличающихся от классических методик [1]. В ряде современных методик расчета многослойных конструкций основной упор делается на использование сплайн-функций, позволяющих более точно описать поведение многослойной конструкции. Новые компьютерные технологии только усиливают возможность применения интерполяции в разработке новых методик. Это не единичный пример применения сплайн-функций в научных исследованиях, используемых в конструкциях антенн. Многие авторы в своих работах используют сплайн-функции и для численных расчетов [2, 3].

Рассмотрим использование программы MATLAB [4] для построения сплайн-функций, рассчитывающих прогиб неподвижно закрепленной с двух сторон многослойной антенны под воздействием синусоидальной поперечной нагрузки без продольного усилия энергетическим методом Ритца [2] (рис. 1).

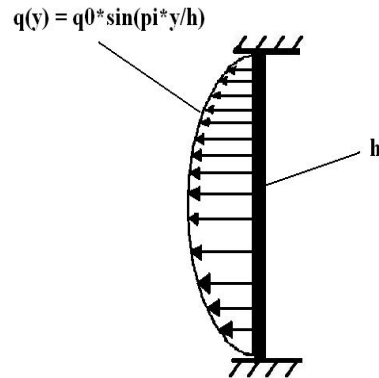


Рис. 1. Жестко закрепленная с двух сторон многослойная антенна.

Вследствие симметрии системы и нагрузки относительно середины пролета полный прогиб антенны равен  $w = w_B + w_S$ , где  $w_B = w_M$  и  $w_S = w_Q$ . Согласно методу Ритца, основанного на минимизации потенциальной энергии [2] и использования отдельных прогибов  $w_M$  и  $w_Q$  можно минимизировать потенциалы ПМ и ПQ по отдельности. При минимизации ПМ учитывается, что нагрузка действует по середине антенны  $x = l/2$ , следовательно, для симметричной части изгиба  $w_M$  выбирается симметричное выражение ряда:

$$w_M(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot w_{Mj}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot \left( 1 - \cos\left(\frac{2 \cdot j \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \right). \quad (1)$$

Функции сравнения  $w_{Mj} = 1 - \cos\left(\frac{2 \cdot j \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$  при  $(j = 1, 2, 3, \dots)$  выполняют все граничные условия:  $w_M(0) = 0$ ;  $w_M(l) = 0$ ;  $w'_M(0) = 0$ ;  $w'_M(l) = 0$ .

Подстановка (1) в  $\Pi_M$ , согласно  $\Pi_M = W_M + U_M$ , и приравнивание к нулю частных производных  $\Pi_M$  по неизвестным постоянным  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) дает для них следующую систему уравнений:

$$B_S \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \alpha_j \int_0^l w_{Mj}'' \cdot w_{Mk}'' dx \right] - \int_0^l q \cdot w_{Mk} dx = 0, \quad R = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

После выполнения математических операций подстановки и интегрирования с использованием метода Ритца над уравнениями (1) и (2) получаем выражение для отдельного изгиба  $w_M$ :

$$w_M = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot B_S} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1/\pi}{j^2 \cdot (4 \cdot j^2 - 1)} \cdot (1 - \cos(2 \cdot j \cdot \pi \cdot \xi)), \quad (3)$$

где  $\xi = \frac{x}{l}$  – безразмерная координата. На рис. 2 показаны графики изменения отдельного прогиба  $w_M$  в зависимости от смещения точки нагрузки от начала многослойной антенны к ее концу, построенный по результатам вычисления (3), на рис. 2а и 2б представлены графики расчетов с помощью функций MATLAB (рассчитанного а – стандартными функциями и б – сплайн-функцией).

Выражение для отдельного прогиба  $w_Q$  следует из (3) и посредством интегрирования уравнения  $B_S \cdot w_M''' + A \cdot w_Q' = 0$  (4)

и с учетом граничных условий  $w_Q(0) = w_Q(l) = 0$  имеет следующий вид:

$$w_Q = \frac{q_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot A} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4/\pi}{4 \cdot j - 1} \cdot (1 - \cos(2 \cdot j \cdot \pi \cdot \xi)). \quad (5)$$

Для наглядной картины изменения раздельного прогиба  $W_Q$  многослойной антенны по всей ее длине и результатов вычисления выражения, описывающего изменение раздельного прогиба (5), были визуализированы с использованием программного пакета MATLAB. Для этого была использована сплайн-функция, позволяющая визуализировать результаты вычислений и стандартные функции трехмерной визуализации (рис. 3).

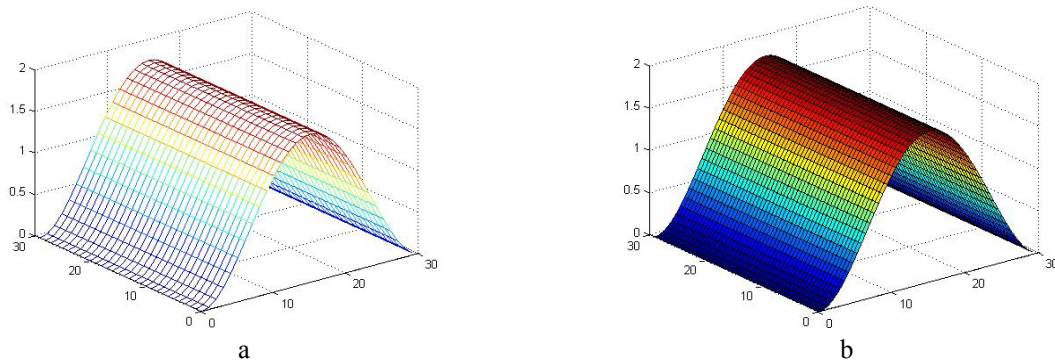


Рис. 2. График прогиба  $w_M$ .

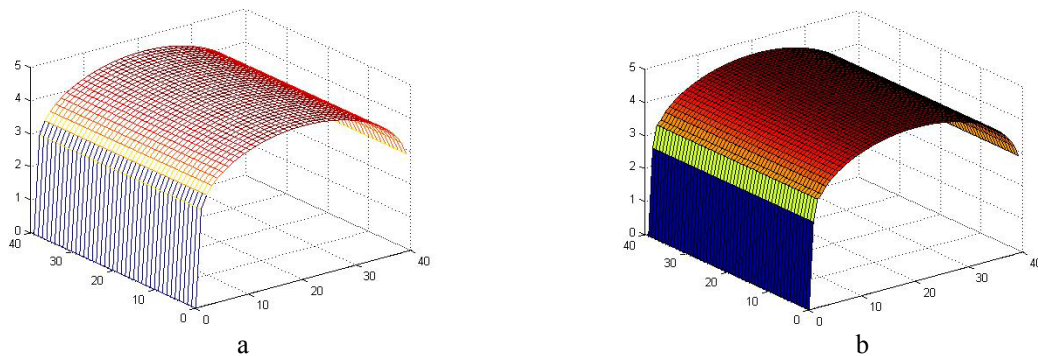


Рис. 3. График прогиба  $w_Q$ .

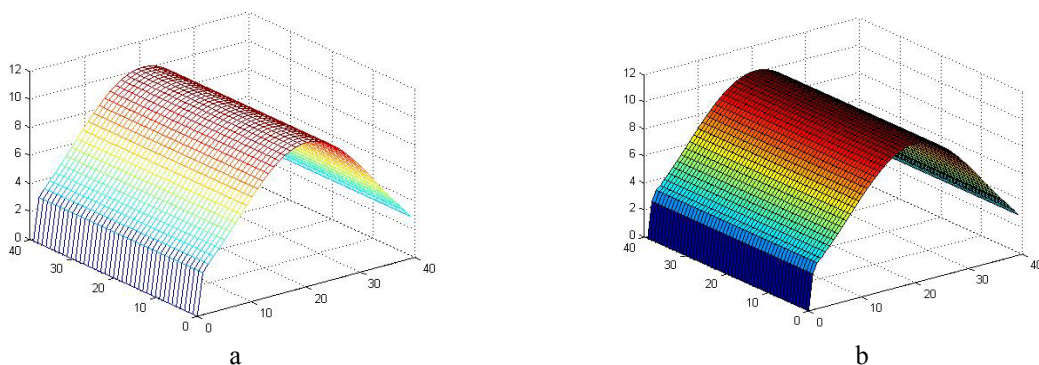


Рис. 4. График прогиба  $w$ .

Для получения данных визуализации была сформирована матрица, описывающая поверхность антенны, на которую действует нагрузка. Результаты вычисления значений прогиба были записаны в эту матрицу, рассчитаны и визуализированы в трехмерном пространстве с помощью кубической сплайн-функции. Полный прогиб  $w$  получается путем сложения отдельных прогибов  $w = w_M + w_Q$  согласно уравнениям (3) и (5).

Результаты визуализации расчетных данных с использованием программного пакета MATLAB показаны на рис. 4, причем на рис. 4.b – график построен с использованием кубического сплайна.

Следующий шаг – минимизирование  $\Pi_Q$ . Для прогиба  $w_Q$  выбирается симметричный относительно центра многослойной балки  $x = l/2$  ряд

$$w_Q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot w_{Qj}(x) = \sum_{j=1,2,3,\dots} b_j \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{l}\right). \quad (6)$$

Функции сравнений  $w_{Qj} = \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$  при  $j = 1, 2, 3, \dots$  выполняют граничные условия  $w_Q(0) = 0$  и  $w_Q(l) = 0$ . Подстановка (6) в  $\Pi_Q$ , согласно  $\Pi_Q = W_Q + U_Q$ , и приравнивание к нулю частных производных от  $\Pi_Q$  по неизвестным постоянным  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) дает для них следующую систему уравнений:

$$A \cdot \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left[ b_j \cdot \int_0^l w_{Qj}' \cdot w_{Qk}' dx \right] - \int_0^l q \cdot w_{Qk} dx = 0.$$

В результате преобразования отдельный прогиб  $w_Q$  будет равен

$$w_Q = \frac{q_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot A} \cdot \sin(\pi \cdot \xi). \quad (7)$$

По расчетам выражения (7) выстраивается график отдельного прогиба  $w_Q$  (рис. 5).



Рис. 5. График прогиба  $w_Q$ .

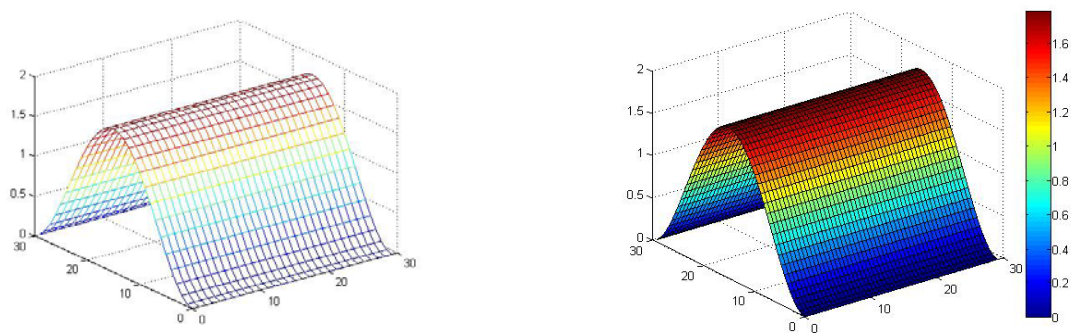


Рис. 6. График прогиба  $w_M$ .

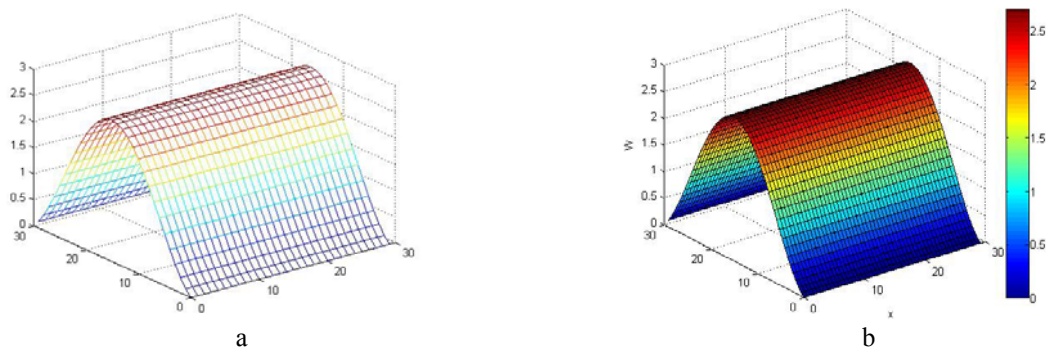


Рис. 7. График прогиба  $w$ .

Прогиб от изгиба  $w_M$  следует из  $w_Q$ , согласно (6). При трехразовом интегрировании (4) и граничных условиях  $w(0) = w(l) = 0$  и  $w'_M(0) = w'_M(l) = 0$  решение имеет вид:

$$w_M = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot B_s} \cdot (\sin(\pi \cdot \xi) + \pi \cdot \xi^2 - \pi \cdot \xi). \quad (8)$$

График изменения прогиба  $w_M$ , построенный по расчетным данным выражения (7), полученным при использовании программного пакета MATLAB, представлен на рис. 6. Полный прогиб  $w$  получается путем суммирования отдельных прогибов  $w_M$  и  $w_Q$  согласно уравнениям (7) и (8). График вычисления полного прогиба  $w$  с использованием кубической сплайн-функцией показан на рис. 7. В этом случае, наиболее приемлемым методом графического представления математической модели изгиба многослойной балки является подход, основанный на использовании сглаживающих кубических сплайн-функций.

Существуют два вида сплайн-функций: интерполяционные сплайны и сглаживающие сплайны. Интерполяционные сплайны целесообразно использовать только в случае, если требуется высокая точность результатов. Применение сглаживающих сплайнов лучше всего подходит при построении математических моделей и анализе изменения механических характеристик, когда не требуется высокая точность результата.

При создании математической модели изгиба многослойной антенны, рассчитанной с применением энергетического метода, использовались кубические сплайн-функции, вложенные в программный пакет MATLAB. Визуализация данных, полученных в результате применения кубических сплайн-функций в виде трехмерного изображения, показывает наиболее качественную картину изменения величины прогиба вдоль многослойной антенны, а с помощью цветовой палитры, расположенной справа от графика, возможен количественный анализ изменения прогиба.

#### Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Новые возможности конструирования многослойных балок // Известия вузов. – 2006. – № 5–6. – С. 63–67.
3. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Применение новых информационных технологий в инженерной практике // Матер. VI межд. научн.-практич. конф. Ч. 1. – Томск, 2007. – С. 103–106.
4. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.