

ОБ УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ СИСТЕМ

Ж.Н. Тасмамбетов, Р.У. Жахина

Методом Фробениуса-Латышевой устанавливаются условия определения нормальных и нормально-регулярных решений одной специальной системы в частных производных.

Ключевые слова: допустимая система; нормальное решение; регулярное решение; нормально-регулярное решение.

Постановка задачи. Изучается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{aligned}
& (a_{20}^{(0)} \cdot x^2 + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{00}^{(0)}) \cdot Z_{xx} + (a_{11}^{(1)} \cdot xy + a_{10}^{(1)} \cdot x + a_{01}^{(1)} \cdot y + a_{00}^{(1)}) \cdot Z_{xy} + \\
& \quad + (a_{10}^{(2)} \cdot x + a_{00}^{(2)}) \cdot Z_x + (a_{01}^{(3)} \cdot y + a_{00}^{(3)}) \cdot Z_y + a_{00}^{(4)} \cdot Z = 0, \\
& (b_{02}^{(0)} \cdot y^2 + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{00}^{(0)}) \cdot Z_{yy} + (b_{11}^{(1)} \cdot xy + b_{10}^{(1)} \cdot x + b_{01}^{(1)} \cdot y + b_{00}^{(1)}) \cdot Z_{xy} + \\
& \quad + (b_{10}^{(2)} \cdot x + b_{00}^{(2)}) \cdot Z_x + (b_{01}^{(3)} \cdot y + b_{00}^{(3)}) \cdot Z_y + b_{00}^{(4)} \cdot Z = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ ($i=0,1,2,3,4; j=0,1; k=0,1,2$) произвольные действительные числа, связанные с одним так называемым [1] допустимым дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}
& (A \cdot x^2 + a_{10} \cdot x + a_{00}) \cdot Z_{xx} + 2(A \cdot xy + b_{10} \cdot x + b_{01} \cdot y + b_{00}) \cdot Z_{xy} + (A \cdot y^2 + \\
& \quad + c_{01} \cdot y + c_{00}) \cdot Z_{yy} + (B \cdot x + d_{00}) \cdot Z_x + (B \cdot y + g_{00}) \cdot Z_y = n \cdot (n \cdot A - A + B) \cdot Z
\end{aligned} \tag{2}$$

с заданными постоянными коэффициентами. Главные коэффициенты A и B в этом уравнении должны быть такими, чтобы при любом неотрицательном m выполнялось условие

$$A \cdot m + B \neq 0. \tag{3}$$

Целью работы является установление условия существования нормальных и нормально-регулярных решений системы (1), с использованием метода Фробениуса–Латышевой [2], а также изучение связи между системой (1) и допустимым дифференциальным уравнением (2).

Нормальные и нормально-регулярные решения системы (1). Специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) имеет некоторые особенности:

1. Особые кривые определяются приравнением к нулю коэффициентов при старших частных производных. Однако очень мало известно о поведении решений в окрестности точек, где пересекаются более чем две особые кривые или в которых две особые кривые касаются.

2. Система (1) должна удовлетворять условиям совместности [3], и должно выполняться так называемое условие интегрируемости:

$$\frac{a_{11}^{(1)} \cdot xy + a_{10}^{(1)} \cdot x + a_{01}^{(1)} \cdot y + a_{00}^{(1)}}{a_{20}^{(0)} \cdot x^2 + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{00}^{(0)}} \cdot \frac{b_{11}^{(1)} \cdot xy + b_{10}^{(1)} \cdot x + b_{01}^{(1)} \cdot y + b_{00}^{(1)}}{b_{02}^{(0)} \cdot y^2 + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{00}^{(0)}} - 1 \neq 0. \tag{4}$$

При выполнении условий интегрируемости (4) система (1) имеет четыре линейно-независимых решения, зависящих от произвольных постоянных.

3. Если все коэффициенты $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ ($i=0,1,2,3,4; j=0,1; k=0,1,2$) отличны от нуля, то ранг системы $p \leq 0$.

Понятие ранга $p = 1 + k$ (k – подранг), введенного А. Пуанкаре и антиранга $m = -1 - \mathfrak{R}$ (\mathfrak{R} – антиподранг), введенного Л. Томе, успешно применялись Ж.Н. Тасмамбетовым для построения аналитической теории изучаемых систем вида (1) [4].

Действительно, если ранг системы (1) $p \leq 0$ и антиранг $m \leq 0$, то соответствующие нормальные и нормально-регулярные решения ищутся в виде

$$Z = x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} A_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (A_{0,0} \neq 0) \tag{5}$$

и

$$Z = x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} B_{\mu, \nu} \cdot x^\mu \cdot y^\nu \quad (B_{0,0} \neq 0). \tag{6}$$

Согласно методу Фробениуса–Латышевой в (5) и (6) для определения неизвестных постоянных $\rho, \sigma, A_{\mu, \nu}, B_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) следует составить системы характеристических функций исходной системы (1), подставляя вместо $Z(x, y) = x^\rho \cdot y^\sigma$:

$$\begin{aligned}
 Z_1[x^\rho \cdot y^\sigma] &\equiv x^{\rho-2} \cdot y^{\sigma-1} \left\{ [a_{20}^{(0)} \cdot \rho(\rho-1) + a_{11}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{10}^{(2)} \cdot \rho + a_{01}^{(3)} \cdot \sigma + a_{00}^{(4)}] \cdot x^2 y + \right. \\
 &\quad + [a_{10}^{(0)} \cdot \rho(\rho-1) + a_{01}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{00}^{(2)} \cdot \rho] \cdot xy + a_{00}^{(0)} \cdot \rho(\rho-1) \cdot y + \\
 &\quad \left. + [a_{10}^{(0)} \cdot \rho\sigma + a_{00}^{(3)} \cdot \sigma] \cdot x^2 + a_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma \cdot x \right\} \\
 Z_2[x^\rho \cdot y^\sigma] &\equiv x^{\rho-1} \cdot y^{\sigma-2} \left\{ [b_{02}^{(0)} \cdot \sigma(\sigma-1) + b_{11}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{10}^{(2)} \cdot \rho + b_{01}^{(3)} \cdot \sigma + b_{00}^{(4)}] \cdot x^2 y + \right. \\
 &\quad + [b_{01}^{(0)} \cdot \sigma(\sigma-1) + b_{10}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{00}^{(3)} \cdot \sigma] \cdot xy + b_{00}^{(1)} \cdot \sigma(\sigma-1) \cdot y + \\
 &\quad \left. + b_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma \cdot y + [b_{01}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{00}^{(2)} \cdot \rho] \cdot y^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Неизвестные постоянные ρ и σ определяются из систем определяющих уравнений относительно особенностей (∞, ∞) и $(0, 0)$. Поэтому для построения нормальных и нормально-регулярных решений системы (1):

во-первых, следует заранее установить при каких значениях коэффициентов $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ ($i=0,1,2,3,4; j=0,1; k=0,1,2$) можно определить системы определяющих уравнений относительно особенностей (∞, ∞) и $(0, 0)$. Во-вторых, проверить необходимое условие существования решений вида (5) и (6) и из них найти значения неизвестных постоянных ρ и σ .

Из (7) можно определить только систему определяющих уравнений относительно особенности (∞, ∞) :

$$\begin{cases} f_{20}^{(1)}(\rho, \sigma) = a_{20}^{(0)} \cdot \rho(\rho-1) + a_{11}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{10}^{(2)} \cdot \rho + a_{01}^{(3)} \cdot \sigma + a_{00}^{(4)} = 0, \\ f_{02}^{(2)}(\rho, \sigma) = b_{02}^{(0)} \cdot \sigma(\sigma-1) + b_{11}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{10}^{(2)} \cdot \rho + b_{01}^{(3)} \cdot \sigma + b_{00}^{(4)} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

и исходная система (1) имеет только нормальные решения вида (5). Система (8) определяет до четырёх пар корней (ρ_i, σ_i) ($i=1,2,3,4$). В свою очередь, это способствует определению четырёх линейно-независимых решений вида (5).

Выполнение условий (8) является *необходимым условием существования* решения вида (5). В рассмотренном случае особые кривые системы регулярные и построенные решения также будут регулярными. Неизвестные коэффициенты $A_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu=0,1,2, \dots$) определяются из рекуррентных систем уравнений.

Если ранг $p > 0$, то особенность иррегулярная и возможно существование решений в виде нормальных рядов Томе двух переменных, а также в виде нормально-регулярных решений [4].

Нормально-регулярные решения обычно связывают с особенностью в $(0, 0)$. Определим при каких значениях коэффициентов система (1) имеет нормально-регулярные решения. Наиболее простой случай имеем при $a_{00}^{(0)} = 0$, $b_{00}^{(0)} = 0$, где соответствующая система характеристических функций имеет систему определяющих уравнений относительно особенности $(0, 0)$.

Она определяет одну пару корня: $(\rho_1 = 0, \sigma_1 = 0)$ и находимо одно решение в виде простого степенного ряда двух переменных. Этот случай интересен тем, что одновременно можно определить и систему определяющих уравнений относительно особенности (∞, ∞) . Она имеет до четырёх пар корней (ρ_i, σ_i) ($i=1,2,3,4$). Поэтому система (1) при $a_{00}^{(0)} = 0$ и $b_{00}^{(0)} = 0$ имеет четыре линейно-независимых нормальных решений вида (5).

Связь изучаемой системы с одним допустимым дифференциальным уравнением

Теорема 1. Основное уравнение

$$a \cdot Z_{xx} + 2b \cdot Z_{xy} + c \cdot Z_{yy} + d \cdot Z_x + g \cdot Z_y = \lambda \cdot u,$$

(a, b, c, d, g – многочлены) допустимо тогда, когда оно имеет вид (2), где коэффициенты $a_{km}, b_{km}, c_{km}, d_{00}, g_{00}$ произвольные фиксированные действительные числа, а числа A и B таковы, что при любом целом неотрицательном p выполняется условие (3) [1].

Определение 1. Совместная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) называется допустимой системой, если сумма двух её уравнений удовлетворяет условиям теоремы (1).

Определение 2. Основной дифференциальный оператор

$$Du = aD_1^2 \cdot Z_{xx} + 2bD_1D_2 \cdot Z_{xy} + cD_2^2 \cdot Z_{yy} + dD_1 \cdot Z_x + gD_2 \cdot Z_y$$

и основное уравнение

$$Du = \lambda \cdot u$$

будем называть **допустимыми**, если для каждого целого неотрицательного числа n существует такое число λ_n , что уравнение

$$Du = \lambda_n \cdot u$$

имеет $n+1$ линейно независимых решений в виде многочленов степени n

$$Q_{n0}(x, y), Q_{n1}(x, y), \dots, Q_{nn}(x, y)$$

и не имеет нетривиальных решений во множестве многочленов степени меньшей, чем n .

Пример. Пусть задана система

$$\begin{aligned} x^2 \cdot Z_{xx} + xy \cdot Z_{xy} + (a_{10}^{(2)} \cdot x + a_{00}^{(2)}) \cdot Z_x + (a_{01}^{(3)} \cdot y + a_{00}^{(3)}) \cdot Z_y + a_{00}^{(4)} \cdot Z &= 0, \\ y^2 \cdot Z_{yy} + xy \cdot Z_{xy} + (b_{10}^{(2)} \cdot x + b_{00}^{(2)}) \cdot Z_x + (b_{01}^{(3)} \cdot y + b_{00}^{(3)}) \cdot Z_y + b_{00}^{(4)} \cdot Z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

с постоянными коэффициентами $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ ($i=0,1,2,3,4; j=0,1; k=0,1$). Она является частным случаем исходной системы и имеет решения при следующих случаях:

1. При $a_{00}^{(3)} = 0, b_{00}^{(2)} = 0$ – нормально-регулярные решения вида (6) и нормальные решения вида (5).

2. При $a_{00}^{(2)} = 0, b_{00}^{(3)} = 0$ – нормальные решения с показателем степени ($\rho = 0, \sigma = 0$) и нормально-регулярные решения вида (6).

3. Конечные решения вида

$$Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i}, \quad Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i} \cdot \ln x, \quad Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i} \cdot \ln y, \quad Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i} \cdot \ln x \cdot \ln y,$$

поскольку при $a_{00}^{(j)} = 0, b_{00}^{(j)} = 0$ ($j=2, 3$) получается система типа Эйлера [2].

Допустимое уравнение, соответствующее системе (9), запишется в виде

$$x^2 \cdot Z_{xx} + 2xy \cdot Z_{xy} + y^2 \cdot Z_{yy} + (B \cdot x + d_{00}) \cdot Z_x + (B \cdot y + g_{00}) \cdot Z_y = n \cdot (n-1 + B) \cdot Z.$$

Теория допустимых уравнений была построена рядом известных математиков, таких, как Г. Кролл, И. Шеффер, Г.К. Энгелис, Т. Корвиндер, Д. Джексон, П.К. Суетин и др. [1]. Решения их связаны с ортогональными многочленами двух переменных. Однако они изучены все еще недостаточно.

Литература

1. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
2. Тасмамбетов Ж.Н. Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса–Латышевой. – Киев, 1991. – 44 с. (Препр. АН УССР. Институт математики; 894).
3. Wilczynski E.J. Projective differential geometry of curves and ruled sup faces. – Leipzig-Feubner, 1906. – 120 p.
4. Тасмамбетов Ж.Н. Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Алматы, 2004. – 41 с.