

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ
ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

К.К. Какишов, Ж.К. Какишов

Строится асимптотическая формула для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в случаях, когда заданные функции в правой части являются негладкими.

Ключевые слова: импульсная функция; функция Дирака; функция пограничного слоя; кусочно-регулярная функция; асимптотика решений.

Рассмотрим

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$\varepsilon z'(x) = g_0(x, y(x), z(x)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \theta(p_k) g_k(x, y(x), z(x)) + \varepsilon \sum_{k=1}^N A_k \delta(p_k), \quad (1)$$

$$y(0) = b_1, \quad z(0) = b_2, \quad (2)$$

$0 < \varepsilon \ll 1$, b_1, b_2 – известные постоянные, A_k – неизвестные постоянные;

$p_k = x - x_k$; x_k – точки разрыва, причем $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1$, $f(x, y, z)$, $g_k(x, y, z)$, ($k = \overline{0, N}$) непрерывно-дифференцируемые функции по своим аргументам; $\theta(p_k)$ – ступенчатая функция Хевисайда:

$$\theta(p_k) = \begin{cases} 0(x \leq x_k), \\ 1(x > x_k), \end{cases} \quad \theta'(p_k) = \delta(p_k) - \text{функция импульс Дирака.}$$

По правилам обобщенного дифференцирования кусочно-регулярных функций, получаем

$$z' = [z'] + \sum_{k=1}^N [z(x_k + 0) - z(x_k - 0)] \delta(P_k) \quad (3)$$

где z' обозначена обобщенная производная, а через $[z']$ – обычная производная, определенная для любого $x \neq x_k$. Так как

$$y'(x) = f(x, y, z),$$

$$\varepsilon[z'] = g_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^N \theta(p_k) g_k(x, y, z), \quad (4)$$

при $x = x_k$

$$y'(x) = f(x, y, z),$$

$$\varepsilon z' + \varepsilon \sum_{k=1}^N [z(x_k + 0) - z(x_k - 0)] \delta(P_k) = g_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^N \theta(P_k) g_k(x, y, z) + \varepsilon \sum_{k=1}^N A_k \delta(P_k). \quad (4_0)$$

Определим неизвестные постоянные:

$$A_k = z(x_k + 0) - z(x_k - 0), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (4_k)$$

Тогда уравнение (4) запишется в виде:

$$y'(x) = f(x, y, z),$$

$$\varepsilon z' = g_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^N \theta(p_k) g_k(x, y, z). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) ищем в классе кусочно-гладких функций подстановкой:

$$y(x) = Y_0(x) + \sum_{k=1}^N \theta(p_k) Y_k(x),$$

$$z(x) = Z_0(x) + \sum_{k=1}^N \theta(p_k) Z_k(x) \quad (5_0)$$

с начальными условиями:

$$Y_0(0) = b_1, \quad Z_0(0) = b_2, \quad Y(x_k) = 0, \quad Z(x_k) = 0, \quad (5_k)$$

Отметим, что в силу определения θ функции мы не будем рассматривать значения $Z(x)$ при $x < x_k$.

Из (4_k) получаем:

$$Z(x_k + 0) = A_k, \quad Z(x_k - 0) = 0. \quad (6)$$

Подставляя (5₀) в (6), получаем:

$$Z_0(x_1) = A_1, \quad (6_1)$$

$$Z_0(x_2) + Z_1(x_2) = A_2, \quad (6_2)$$

.....

$$Z_0(x_N) + Z_1(x_N) + \dots + Z_{N-1}(x_N) = A_N. \quad (6_N)$$

Подставив (5₀) в (5) а затем, учитывая свойства функции Хевисайда, получаем:

$$Y'_0 = f(x, Y_0, Z_0), \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z'_0 = g_0(x, Y_0, Z_0). \quad (7_0)$$

Для определения Y_k, Z_k составляется цепочка нелинейных дифференциальных уравнений при $x \geq x_k$.

$$Y'_1 = f(x, \sum_{k=0}^1 Y_k, \sum_{k=0}^1 Z_k) - f(x, Y_0, Z_0), \quad (x_1 \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z'_1 = \sum_{k=0}^1 g_k(x, \sum_{k=0}^1 Y_k, \sum_{k=0}^1 Z_k) - g_0(x, Y_0, Z_0), \quad (7_1)$$

$$Y'_2 = f(x, \sum_{k=0}^2 Y_k, \sum_{k=0}^2 Z_k) - f(x, \sum_{k=0}^1 Y_k, \sum_{k=0}^1 Z_k), \quad (x_2 \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z'_2 = \sum_{k=0}^2 g_k(x, \sum_{k=0}^2 Y_k, \sum_{k=0}^2 Z_k) - \sum_{k=0}^1 g_k(x, \sum_{k=0}^1 Y_k, \sum_{k=0}^1 Z_k), \quad (7_2)$$

$$Y'_N = f(x, \sum_{k=0}^N Y_k, \sum_{k=0}^N Z_k) - f(x, \sum_{k=0}^{N-1} Y_k, \sum_{k=0}^{N-1} Z_k), \quad (x_N \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z'_N = \sum_{k=0}^N g_k(x, \sum_{k=0}^N Y_k, \sum_{k=0}^N Z_k) - \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x, \sum_{k=0}^{N-1} Y_k, \sum_{k=0}^{N-1} Z_k). \quad (7_N)$$

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (7₀) ищется в виде:

$$Y_0 = \vartheta_0 + \varepsilon \xi_0, \quad Z_0 = \omega_0 + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \eta_0, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (8)$$

с начальными условиями:

$$\vartheta_0(0) = b_1, \quad \Pi_0(0) = b_2 - \omega_0(0),$$

$$\xi_0(0, \varepsilon) = 0, \quad \eta_0(0, \varepsilon) = 0. \quad (8_0)$$

Из (8) (7₀) получаем:

$$\vartheta'_0 = f(x, \vartheta_0, \omega_0), \quad 0 = g_0(x, \vartheta_0, \omega_0), \quad (8_1)$$

$$\Pi_0 = g_0(0, \vartheta_0(0), \omega_0(0) + \Pi_0), \quad (8_2)$$

$$\xi'_0 = \frac{1}{\varepsilon} [g_0(x, \vartheta_0 + \varepsilon \xi_0, \omega_0 + \Pi_0 + \varepsilon \eta_0) - g_0(x, \vartheta_0 + \omega_0 + \Pi_0)] + \beta_0(x, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \eta'_0 = \frac{1}{\varepsilon} [g_0(x, \vartheta_0 + \varepsilon \xi_0, \omega_0 + \Pi_0 + \varepsilon \eta_0) - g_0(x, \vartheta_0, \omega_0 + \Pi_0)] + \gamma_0(x, \varepsilon), \quad (8_3)$$

где $\beta_0(x, \varepsilon) \equiv [f(x, \vartheta_0, \omega_0 + \Pi_0) - f(x, \vartheta_0, \omega_0)] \frac{1}{\varepsilon}$;

$$\gamma_0(x, \varepsilon) \equiv -\omega'_0 + [g_0(x, \vartheta_0, \omega_0 + \Pi_0) - g_0(0, \vartheta_0(0), \omega_0(0) + \Pi_0)] \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если на сегменте $[0, 1]$ удовлетворяется условие $f'_y(0, \vartheta_0(0), \omega_0(0)) \leq -\alpha_0 = const > 0$,

$$|\Pi_0(\tau)| \leq K e^{-\alpha_0 \tau}, \quad K = const > 0, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Определим

$$A_1 = \omega_0(x_1) + \Pi_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \xi_0(x_1, \varepsilon). \quad (9)$$

Аналогично теми же методами, как и выше, определим неизвестные функции $[Y_1, Z_1], \dots, [Y_{N-1}, Z_{N-1}]$. Из (7₀) определяем неизвестные постоянные:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\omega_k(x_N) + \Pi_k \left(\frac{x_N - x_k}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \eta_k(x_k, \varepsilon) \right) = A_N, \quad x_0 = 0. \quad (10)$$

Решение задачи Коши (6_N) для системы нелинейных дифференциальных уравнений (5_N) ищется в виде:

$$\begin{aligned} Y_N &= \mathcal{G}_N(x) + \varepsilon \xi_N(x, \varepsilon), \\ Z_N &= \omega_N(x) + \Pi_N(\tau_N) + \varepsilon \eta_N(x, \varepsilon), \quad \tau_N = (x - x_N) / \varepsilon \end{aligned} \quad (10_0)$$

с начальными условиями:

$$\mathcal{G}_N(x_N) = 0, \quad \Pi_N(0) = -\omega_N(x_N), \quad \xi_N(x_N, \varepsilon) = 0, \quad \eta_N(x_N, \varepsilon) = 0, \quad (10_1)$$

где $|\Pi_k| \leq K e^{-\alpha k \tau}$, $|\xi_k|, |\eta_k| \leq K = \text{const} \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^N g'_{kz} \left(x, \sum_{k=0}^N \mathcal{G}_k(x_k), \sum_{k=0}^N \omega_k(x_k) \right) \leq -\alpha_k = \text{const} > 0. \quad (11)$$

Теорема. Пусть 1) нелинейные вырожденные системы (8₁), (11) имеют некоторые непрерывные решения $[\mathcal{G}_k, \omega_k]$, $(k = \overline{0, N})$; 2) неизвестные постоянные A_k определяются из (9), (10); 3) функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $(k = \overline{0, N})$ имеют непрерывные производные до второго порядка в некоторой ограниченной окрестности множества M_k , $(k = \overline{0, N})$.

Тогда при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ (ε_0 – фиксированное число) система (1) (2) имеет единственное непрерывное решение:

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= \mathcal{G}_0(x) + \varepsilon \xi_0(x, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \theta(p_k) (\mathcal{G}_k(x) + \varepsilon \xi_k(x, \varepsilon)), \\ z(x, \varepsilon) &= \omega_0(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \eta_0(x, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \theta(p_k) (\omega_k(x) + \Pi_k(\tau_k) + \varepsilon \eta_k(x, \varepsilon)), \end{aligned}$$

причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ это решение сходится к разрывному решению соответствующего вырожденного уравнения на полусегменте $0 < x \leq 1$.