

**ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОГО
НЕЯВНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ**

С. Искандаров, М.А. Темиров

Устанавливаются достаточные условия ограниченности и стабилизации на полуоси решений слабонелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка.

Ключевые слова: ограниченность; стабилизация; метод весовых и срезающих функций.

Все фигурирующие ниже функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0; |u_k|, |v_k|, |w_k| < \infty$ ($k = 1..m$); $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

Задача. Установить достаточные условия немалости членов ограниченности на J и стремления к конечным пределам (стабилизации) при $t \rightarrow \infty$ любого решения ИДУ первого порядка типа Вольтерра вида:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x'(\tau)d\tau = f(t) + \sum_{j=1}^m F_k(t, x(\alpha_k(t)), \int_{t_0}^t H_k(t, \tau, x(\beta_k(\tau)))d\tau), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где функции $F_k(t, u_k, v_k), H_k(t, \tau, w_k)$ ($k = 1..m$) в области $D = \{t \geq t_0, |u_k| < \infty, |v_k| < \infty, |w_k| < \infty$ ($k = 1..m\})$ удовлетворяют условию “слабой нелинейности”:

$$\begin{aligned} |F_k(t, u_k, v_k)| &\leq f_{0k}(t) + g_k(t)|u_k| + q_k(t)|v_k|, \\ |H_j(t, \tau, w_k)| &\leq h_k(t, \tau)|w_k| \quad (k = 1..m) \end{aligned} \quad (SN)$$

с неотрицательными функциями $f_{0k}(t), g_k(t), q_k(t), h_k(t, \tau)$ ($k = 1..m$), и в случае справедливости “условий запаздывания”:

$$t_0 \leq \alpha_k(t) \leq t, \quad t_0 \leq \beta_k \leq t \quad (k = 1..m). \quad (\alpha), (\beta)$$

Как видно из условий (α) , (β) , начальное множество E_{t_0} для ИДУ (1) состоит из одной точки $\{t_0\}$.

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^1(J, R)$ с любыми начальными данными $x(t_0)$. В силу условий (SN) , (α) , (β) такие решения существуют (см., например, [1]).

Отметим, что в [2] сформулированная задача для ограниченности на J решений при $a(t) \equiv 0$ изучена методом возведения уравнений в квадрат [3, с. 28], методом срезающих функций [3, с. 41] и с использованием леммы [2] об интегральном неравенстве с запаздываниями; в [1] – для случая стремления к конечным пределам решений ИДУ вида (1) с $a(t) \equiv f(t) \equiv 0$ при $t \rightarrow \infty$ методом интегральных уравнений [3, с. 12-13] и методом интегральных неравенств с запаздыванием [1].

В настоящей работе приведенная задача для ИДУ (1) решается методом весовых и срезающих функций [1] и методом интегральных неравенств с запаздываниями [2]. При этом обосновывается необходимость введения некоторой положительной весовой функции и выявляется влияние интегральных возмущений на ограниченность решений ДУ вида:

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t) + F_1(t, x(\alpha_1(t))). \quad (1^*)$$

Пусть [3]: $0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция,

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau), \quad (K)$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t), \quad (f)$$

$\psi_i(t)$ ($i = 1..n$) – некоторые срезающие функции,

$$R_i(t, \tau) \equiv \varphi(t)K_i(t, \tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t) \equiv \varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1} \quad (i = 1..n),$$

$$R_i(t, t_0) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n), \quad (R)$$

$c_i(t)$ ($i = 1..n$) – некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (1) умножаем на $\varphi(t)x'(t)$ [4], интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условия (K) , (f) , функции $\psi_i(t)$, $R_i(t, \tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ ($i = 1..n$), используем леммы 1.4, 1.5 [5], и с учетом условия (SN) приходим следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{t_0}^t \varphi(s)(x'(s))^2 ds + a(t)\varphi(t)(x(t))^2 - \int_{t_0}^t (a(s)\varphi(s))'(x(s))^2 ds + \\ & + \sum_{i=1}^n \{A_i(t)(X_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t A_i'(s)(X_i(s, t_0))^2 ds + B_i(t)(X_i(t, t_0))^2 - \\ & - 2E_i(t)X_i(t, t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^t [B_i'(s)(X_i(s, t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s, t_0) + c_i'(s)] ds + \\ & + \int_{t_0}^t R_{i\tau}'(t, \tau)(X_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{i\tau}''(s, \tau)(X_i(s, \tau))^2 d\tau ds\} \leq c_* + \\ & + 2 \int_{t_0}^t \varphi(s)|x'(s)| \left\{ \sum_{k=1}^m [f_{\alpha k}(s) + g_k(s)|x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau)|x(\beta_k(\tau))| d\tau] \right\} ds, \quad t \leq t_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$X_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(s)x'(s) ds \quad (i = 1..n), \quad c_* = a(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0), \quad G_k(t, \tau) \equiv q_k(t)h_k(t, \tau) \quad (k = 1..m).$$

Применяя к подынтегральной мультипликативной функции неравенство $2u_1u_2 \leq u_1^2 + u_2^2$ ($\forall u_1, u_2 \in R$), имеем

$$2 \int_{t_0}^t \varphi(s) x'(s) \left\{ \sum_{k=1}^m [f_{ok}(s) + g_k(s) |x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau) |x(\beta_k(\tau))| d\tau] \right\} ds \leq \int_{t_0}^t \varphi(s) (x'(s))^2 ds + \int_{t_0}^t \varphi(s) \left\{ \sum_{k=1}^m [f_{ok}(s) + g_k(s) |x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau) |x(\beta_k(\tau))| d\tau] \right\}^2 ds, \quad t \leq t_0. \quad (3)$$

В силу $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in R$ имеем:

$$\left\{ \sum_{k=1}^m [f_{ok}(s) + g_k(s) |x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau) |x(\beta_k(\tau))| d\tau] \right\}^2 \leq 2 \left(\sum_{k=1}^m f_{ok}(s) \right)^2 + 2 \left\{ \sum_{k=1}^m [g_k(s) |x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau) |x(\beta_k(\tau))| d\tau] \right\}^2. \quad (4)$$

С учетом (3), (4) из неравенства (2) получаем следующее неравенство:

$$V(t) \equiv \int_{t_0}^t \varphi(s) (x'(s))^2 ds + a(t) \varphi(t) (x(t))^2 + \sum_{i=1}^n \{ A_i(t) (X_i(t, t_0))^2 + B_i(t) (X_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t) X_i(t, t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^t [B_i'(s) (X_i(s, t_0))^2 - 2E_i'(s) X_i(s, t_0) + c_i'(s)] ds + \int_{t_0}^t R_{ir}'(t, \tau) (X_i(t, \tau))^2 d\tau \leq c_* + \int_{t_0}^t \{ (a(s) \varphi(s))' (x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^n [A_i'(s) (X_i(s, t_0))^2 + R_{isr}''(s, \tau) (X_i(s, \tau))^2 d\tau] \} ds + 2 \int_{t_0}^t \varphi(s) \left(\sum_{k=1}^m f_{ok}(s) \right)^2 ds + 2 \int_{t_0}^t \varphi(s) \left\{ \sum_{k=1}^m [g_k(s) |x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau) |x(\beta_k(\tau))| d\tau] \right\}^2 ds. \quad (5)$$

Теорема. Пусть 1) выполняются условия (SN) , (α) , (β) , (K) , (f) , (R) ; $\varphi(t) > 0$; 2) $a(t) = a_1(t) + a_2(t)$, $a_1(t) > 0$; $(\varphi(t) a_1(t))' \geq 0$, $a_2(t) \geq 0$, существует функция $a_2^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $(\varphi(t) a_2(t))' \leq a_2^*(t) \varphi(t) a(t)$; 3) $A_i(t) \geq 0$, $B_i(t) \geq 0$, $B_i'(t) \leq 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$, $c_i(t)$ такие, что $A_i'(t) \leq A_i^*(t) A_i(t)$, $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t)$ ($i = 1..n$; $k = 0, 1$); 4) $R_{ir}'(t, \tau) \geq 0$, существуют функции $R_{ir}^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такие, что $R_{ir}''(t, \tau) \leq R_{ir}^*(t) R_{ir}'(t, \tau)$ ($i = 1..n$); 5) $\varphi(t) \left\{ \left(\sum_{k=1}^m f_{ok}(t) \right)^2 + \sum_{k=1}^m [g_k(t) (a(\alpha_k(t)) \varphi(\alpha_k(t)))^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^t G_k(t, \tau) (a(\beta_k(\tau)) \varphi(\beta_k(\tau)))^{\frac{1}{2}} d\tau]^2 \right\} \in L^1(J, R_+)$.

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) выполняются утверждения:

$$x(t) = O(1), \quad (6)$$

$$\int_{t_0}^t \varphi(s) (x'(s))^2 ds = \varphi(t) a_1(t) O(1). \quad (7)$$

Идея доказательства такова. В силу условий 2) – 5) теоремы из (5) имеем:

$$\begin{aligned}
 V(t) \leq c_{**} + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{(a_1(s)\varphi(s))'}{a_1(s)\varphi(s)} + a_2^*(s) + \sum_{i=1}^n [A_i^*(s) + R_i^*(s)] \right\} V(s) ds + \\
 + 2 \int_{t_0}^t \varphi(s) \{ g_k(s) (a(\alpha_k(s))\varphi(\alpha_k(s)))^{-\frac{1}{2}} (V(\alpha_k(s)))^{\frac{1}{2}} + \\
 + \int_{t_0}^s G_k(s, \tau) (a(\beta_k(\tau))\varphi(\beta_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} (V(\beta_k(\tau)))^{\frac{1}{2}} d\tau \}^2 ds, \quad t \geq t_0, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где $c_{**} = c_* + 2 \int_{t_0}^{\infty} \varphi(s) (\sum_{k=1}^m [f_{0k}(s)]^2) ds < \infty$.

Далее к интегральному неравенству (8) применяется лемма из [2].

Следствие. Если 1) выполняются все условия теоремы и $\varphi(t)a_1(t) = O(1)$; 2) $\varphi(t) > 0$, $(\varphi(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$, то любое решение $x(t)$ ИДУ (1) стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$.

Утверждение следствия вытекает из:

$$|x'(t)| = (\varphi(t))^{\frac{1}{2}} |x'(t)| (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} [\varphi(t)(x'(t))^2 + (\varphi(t))^{-1}]$$

интегрированием от t_0 до t и переходом к пределу при $t \rightarrow \infty$, аналогично теореме 2 и следствию 1 из [6].

Приведем простейшие примеры.

Пример 1. Для ИДУ

$$x'(t) + e^{-t}x(t) + \int_0^t e^{-t} e^{t^2+\tau^2} \frac{1}{t-\tau+1} x'(\tau) d\tau = -\frac{e^{-t}e^{t^2}}{t+2} + \frac{e^{-t}}{t^2+1} x\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \geq 0$$

выполняются все условия следствия при $\varphi(t) \equiv e^t$, $n=1$, $\psi_1(t) \equiv e^{t^2}$, $A_1(t) \equiv 0$, $B_1(t) \equiv \frac{1}{t+1}$, $E_1(t) \equiv \frac{-1}{t+2}$, $c_1(t) \equiv \frac{1}{t+1}$, и, значит, любое его решение $x(t)$ стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$, т.е. $|\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)| = |x(\infty)| < \infty$.

Из этого примера следует, что есть необходимость введения некоторой весовой функции $\varphi(t) > 0$ для установления условий стабилизации решений при $t \rightarrow \infty$ ИДУ (1).

Пример 2. ИДУ

$$x'(t) + x(t) + \int_0^t e^{2t+2\tau} x'(\tau) d\tau = 3e^{2t} + e^{-t} x\left(\frac{t}{3}\right) \sin[x(t) - e^{2t}], \quad t \geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы при $\varphi(t) \equiv 1$, $n=1$, $\psi_1(t) \equiv e^{2t}$, $A_1(t) \equiv 0$, $B_1(t) \equiv 1$, $E_1(t) \equiv 3$, $c_1(t) \equiv 9$. Поэтому все решения этого ИДУ ограничены при $t \geq 0$. Однако, соответствующее ДУ:

$$x'(t) + x(t) \equiv 3e^{2t} + e^{-t} x\left(\frac{t}{3}\right) \sin[x(t) - e^{2t}], \quad t \geq 0$$

имеет решение $x(t) = e^{2t}$, неограниченное при $t \in R_+$

где $G(t) \equiv b_{11}^*(t) + 2|b_{12}(t)|(b_{11}(t))^{-\frac{1}{2}} + 2[|b_{01}(t)| + |b_{02}(t)|]$.

Таким образом, выявлено влияние интегрального члена типа Вольтера на ограниченность решений ДУ вида (1*).

Литература

1. *Ведь Ю.А., Китаева Л.Н.* О стремлении к конечным пределам решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып. 3. – С. 137–142.
2. *Ведь Ю.А., Искандаров С., Халилов А.Т.* Лемма об одном интегральном неравенстве с запаздываниями и ее применение к ограниченности решений вольтеррова неявного интегро-дифференциального уравнения // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 22–25.
3. *Искандаров С.* Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
4. *Искандаров С.* Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 185–192.
5. *Искандаров С.* Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс... докт. физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.
6. *Искандаров С.* Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып. 17. – С. 161–165.