УДК 517.968.72

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Е.А. Комарцова

Устанавливаются достаточные условия устойчивости решений, т. е. ограниченности на полуоси всех решений и их производных первого, второго, третьего, четвертого порядков линейного интегро-дифференциального уравнения пятого порядка типа Вольтерра. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; устойчивость решений; ограниченность решений; ограниченность производных решений.

БЕШИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖАРЫМ ОКТУУ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРАЛЫК ИНТЕГРАЦИЯЛЫК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТEҢДЕМЕНИ ЧЫГАРУУНУН ТУРУКТУУЛУГУНУН ЖЕТИШТҮҮ ШАРТТАРЫ

Бул макалада Вольтерра тибиндеги бешинчи тартиптеги сызыктуу интеграциялык-дифференциалдык теңдеменин туруктуу чыгарылыштарынын б.а. бардык чыгарылыштарынын жана алардын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү тартиптеги туундуларынын жарым окто чектелгендигинин жетиштүү шарттары белгиленет. Иллюстративдик мисал келтирилет.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги интеграциялык-дифференциалдык теңдеме; чыгарылыштарынын туруктуулугу; чыгарылыштарынын чектелгендиги.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIFTH ORDER ON THE SEMIAXIS

E.A. Komartsova

The sufficient conditions for the stability of solutions, i.e. the limitations on the half-axis of all solutions and their derivatives of the first, second, third, fourth orders of the linear integro-differential equation of the fifth order like Voltaire are established. The illustrative example is constructed.

Keywords: the integro-differential equation like Volterra; stability of solutions; limitation of solutions; limitation of derivative of solutions.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными, и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; под устойчивостью любого решения линейного интегро-дифференциального уравнения пятого порядка понимается ограниченность на J всех его решений и их производных до четвертого порядка включительно; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия устойчивости любого решения линейного вольтеррова ИДУ пятого порядка типа вида

$$x^{(5)}(t)+\sum_{k=0}^{4}[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau]=f(t),\ \ t\ge t_0. \tag{1}$$

Такая задача ранее изучена в [1] развитием нестандартного метода сведения к системе [2, 3], методом преобразования уравнений В. Вольтерра [4, с. 25–27], методом срезывающих функций [4, с. 41] и методом интегральных неравенств [5]. Отметим, что в [1] отражены многие работы, в которых решена аналогичная задача другими методами и при других условиях. В настоящей работе к сформулированной задаче добавляется схема нестандартного метода сведения к системе из [6–8], метод преобразования уравнений В. Вольтерра [4, с. 25–27], метод срезывающих функций [4, с. 41] и метод интегральных неравенств [5], что приведет к новым достаточным условиям устойчивости всех решений ИДУ (1), отличных от результатов других авторов [1]. Настоящая работа дополняет исследования, начатые в [1, 8].

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t)\in C^5(J,R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1,2,3,4)$. Каждое такое решение существует и единственно.

В ИДУ (1), аналогично [6–8], сделаем следующие замены:

$$\begin{cases} x'(t)=W_1(t)y_1(t), & (2)\\ y_1'(t)=W_2(t)y_2(t), & (3)\\ y_2'(t)=W_3(t)y_3(t), & (4)\\ y_3'(t)=W_4(t)y_4(t), & (5)\end{cases}$$

где $0<W_k(t)$ $(k=1,2,3,4)$ – некоторые весовые функции; $y_k(t)$ $(k=1,2,3,4)$ – новые неизвестные функции.

Введем следующие обозначения:

$W(t)=W_1(t)W_2(t)W_3(t)W_4(t)$,

$W_*(t)\equiv W_1''(t)W_2(t)+[W_1'(t)W_2(t)+\left(W_1(t)W_2(t)\right)']'$,

$W_{**}(t)\equiv [W_1'(t)W_2(t)+\left(W_1(t)W_2(t)\right)']W_3(t)+\left(W_1(t)W_2(t)W_3(t)\right)'$,

$b_4(t)\equiv a_4(t)+[W_{**}(t)W_4(t)+W'(t)]\left(W(t)\right)^{-1}$ (коэффициент $y_4(t)$),

$b_3(t)\equiv\left[a_3(t)W_1(t)W_2(t)W_3(t)+a_4(t)W_{**}(t)+W_*(t)W_3(t)+W_{**}'(t)\right]\left(W(t)\right)^{-1}$ (коэффициент $y_3(t)$),

$b_2(t)\equiv[a_2(t)W_1(t)W_2(t)+a_3(t)\{W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))'\}+a_4(t)W_*(t)+W_1'''(t)W_2(t)+W_*'(t)]\left(W(t)\right)^{-1}$

(коэффициент $y_2(t)$),

$b_1(t)\equiv[a_1(t)W_1(t)+a_2(t)W_1'(t)+a_3(t)W_1''(t)+a_4(t)W_1'''(t)+W_1^{(4)}(t)]\left(W(t)\right)^{-1}$ (коэффициент $y_1(t)$),

$b_0(t)\equiv a_0(t)\left(W(t)\right)^{-1}$ (коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_0(t,\tau)$ (ядро с $x(\tau)$),

$P_1(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\{Q_1(t,\tau)W_1(\tau)+Q_2(t,\tau)W_1'(\tau)+Q_3(t,\tau)W_1''(\tau)+Q_4(t,\tau)W_1'''(\tau)]$ (ядро с $y_1(\tau)$),

$P_2(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}[Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)+Q_3(t,\tau)\{W_1'(\tau)W_2(\tau)+(W_1(\tau)W_2(\tau))'\}+Q_4(t,\tau)W_*(\tau)]$ (ядро с $y_2(\tau)$),

$P_3(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}[Q_3(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau)+Q_4(t,\tau)W_{**}(\tau)]$ (ядро с $y_3(\tau)$),

$K(t,\tau)=\left(W(t)\right)^{-1}Q_4(t,\tau)W(\tau)$ (ядро с $y_4(\tau)$),

$q(t)\equiv f(t)\left(W(t)\right)^{-1}$ (новый свободный член).

Тогда с учетом введенных обозначений ИДУ пятого порядка (1) сводится к следующей системе [8]:

$$\begin{cases} x'(t) = W_1(t)\, y_1(t), \\ y_1'(t) = W_2(t)\, y_2(t), \\ y_2'(t) = W_3(t)\, y_3(t), \\ y_3'(t) = W_4(t)\, y_4(t), \\ y_4'(t) + b_4(t)\, y_4(t) + b_3(t)\, y_3(t) + b_2(t)\, y_2(t) + b_1(t)\, y_1(t) + b_0(t)\, x(t) + \\ + \int_{t_0}^{t} \left[P_0(t,\tau)\, x(\tau) + P_1(t,\tau)\, y_1(\tau) + P_2(t,\tau)\, y_2(\tau) + P_3(t,\tau)\, y_3(\tau) + \right. \\ \left. + K(t,\tau)\, y_4(\tau) \right] d\tau = q(t), \ \ t \ge t_0, \end{cases} \tag{6}$$

эквивалентной исходному ИДУ пятого порядка (1).

Пусть

$$K(t,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) + P_4(t,\tau), \tag{K}$$

$$q(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(t) + \tilde{q}(t), \tag{q}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$ – некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}, E_i(t) \equiv f_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1} \quad (i = 1..n),$$

$$R_i(t,t_0) \equiv A_i(t) + B_i(t) \ \ (i = 1...n), \tag{R}$$

$c_i(t)$ $(i = 1...n)$ – некоторые функции.

К системе (6) развиваем метод преобразования уравнений В. Вольтерра [4, с. 25–27] и метод срезывающих функций [4, с.41]. Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ системы (6) ее первое уравнение умножаем на $x(t)$, второе – на $y_1(t)$, третье – на $y_2(t)$, четвертое – на $y_3(t)$, пятое ИДУ – на $y_4(t)$, затем складываем их, интегрируем в пределах от t_0 до t, при этом вводим условия (*K*), (*q*), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $(i = 1..n)$, применяем леммы 1.4, 1.5 [9]. Тогда будем иметь следующее тождество:

$$\begin{aligned} &(x(t))^2 + (y_1(t))^2 + (y_2(t))^2 + (y_3(t))^2 + (y_4(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_4(s)(y_4(s))^2 ds + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\Big\{ A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 ds + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t,t_0) + \\ &+c_i(t) - \int_{t_0}^{t}\Big[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s,t_0) + c_i'(s)\Big] ds + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau - \\ &-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2 d\tau ds\Big\} \equiv c_* + 2\int_{t_0}^{t}\Big[W_1(s)y_1(s)x(s) + W_2(s)y_2(s)y_1(s) + \\ &+W_3(s)y_3(s)y_2(s) + W_4(s)y_4(s)y_3(s) + \tilde{q}(s)y_4(s)\Big] ds - 2\int_{t_0}^{t} y_4(s)\Big\{ b_3(s)y_3(s) + \\ &+b_2(s)y_2(s) + b_1(s)y_1(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^{s}\Big[P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)y_1(\tau) + \\ &+P_2(s,\tau)y_2(\tau) + P_3(s,\tau)y_3(\tau) + P_4(s,\tau)y_4(\tau)\Big] d\tau\Big\} ds, \end{aligned} \tag{7}$$

где $Y_i(t,\tau)\equiv\int_\tau^t \psi_i(\eta)y_4(\eta)d\eta \quad (i=1..n),\ c_*=\left(x(t_0)\right)^2+\sum_{k=1}^4\left(y_k(t_0)\right)^2+\sum_{i=1}^n c_i(t_0).$

Предположим:

$$\tilde{q}(t)=q_1(t)q_2(t)+q_3(t), \qquad (\tilde{q})$$

$$b_0(t)=b_{01}(t)b_{02}(t)+b_{03}(t), \qquad (b_0)$$

$$P_0(t,\tau)=P_{01}(t,\tau)P_{02}(t,\tau)+P_{03}(t,\tau), \qquad (P_0)$$

$$P_4(t,\tau)=P_{41}(t,\tau)P_{42}(t,\tau)+P_{43}(t,\tau), \qquad (P_4)$$

$$\Delta(t)\equiv 2b_4(t)-\left(q_2(t)\right)^2-\left(b_{02}(t)\right)^2-\int_{t_0}^t\left[\left(P_{02}(t,\tau)\right)^2+\left(P_{42}(t,\tau)\right)^2\right]d\tau.$$

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:

1) $W_k(t)>0 \quad (k=1,2,3,4)$, $(K),(q),(R),(\tilde{q}),(b_0),(P_0),(P_4)$;

2) $\Delta(t)\ge 0$;

3) $A_i(t)\ge 0$, $B_i(t)\ge 0,$ $B_i'(t)\le 0$, $R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0$,

существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$, $c_i(t), R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что

$$A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t),\ \left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{i\tau}''(t,\tau)\le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)\ \ (i=1..n;\ k=0,1);$$

4) $W_k(t)+\left(q_1(t)\right)^2+|q_3(t)|+|b_j(t)|+\left(b_{01}(t)\right)^2+|b_{03}(t)|+\int_{t_0}^t\left[\left(P_{01}(t,\tau)\right)^2+|P_{03}(t,\tau)|+\left(P_{41}(t,\tau)\right)^2+|P_{43}(t,\tau)|\right]d\tau+$
$+\int_{t_0}^t|P_j(t,\tau)|d\tau\in L^1\left(J,R_+\setminus\{0\}\right)\ (k=1,2,3,4;\ j=1,2,3).$

Тогда $x(t)=O(1)$, $y_k(t)=O(1)\quad (k=1,2,3,4)$, т. е. любое решение $\left(x(t),y_1(t),y_2(t),y_3(t),y_4(t)\right)$ системы (6) ограничено на полуинтервале J.

Пусть, кроме того,

5) $W_k(t)+|W_j'(t)|+|W_1''(t)|+|W_1'''(t)|+|W_2''(t)|=O(1)\quad (k=1,2,3,4;\ j=1,2,3).$

Тогда любое решение $x(t)$ ИДУ пятого порядка (1) и его производные до четвертого порядка включительно ограничены на полуинтервале J, т. е. любое решение ИДУ (1) устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим неравенство $2\alpha\beta\le\alpha^2+\beta^2\quad\left(\forall\alpha,\beta\in R\right)$ к произведениям функций в условиях $(\tilde{q}),(b_0),(P_0),(P_4)$ и в силу условий 2), 3), 4) переходим от тождества (7) к следующему интегральному неравенству:

$$0\le u(t)\equiv\left(x(t)\right)^2+\left(y_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)\right)^2+\left(y_3(t)\right)^2+\left(y_4(t)\right)^2+\int_{t_0}^t\Delta(s)\left(y_4(s)\right)^2ds+$$

$$+\sum_{i=1}^n\left[A_i(t)\left(Y_i(t,t_0)\right)^2+\int_{t_0}^t R_{i\tau}'(t,\tau)\left(Y_i(t,\tau)\right)^2d\tau\right]\le c_{**}+2\int_{t_0}^t\left[\sum_{k=1}^4 W_k(s)u(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(A_i^*(s)+R_i^*(s)\right)u(s)+\left(q_1(s)\right)^2u(s)+|q_3(s)|\left(u(s)\right)^{\frac{1}{2}}\right]ds+$$

$$+2\int_{t_0}^t\left\{\sum_{j=1}^3\left[|b_j(s)|u(s)+\left(u(s)\right)^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^s|P_j(s,\tau)|\left(u(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}d\tau\right]+\left[\left(b_{01}(s)\right)^2+|b_{03}(s)|\right]u(s)+\right.$$

$$+\int_{t_0}^{s}\Big[\big(P_{01}(s,\tau)\big)^2 u(\tau)+\left|P_{03}(s,\tau)\right|\big(u(s)\big)^{\frac{1}{2}}\big(u(\tau)\big)^{\frac{1}{2}}+\big(P_{41}(s,\tau)\big)^2 u(\tau)+\left|P_{43}(s,\tau)\right|\big(u(s)\big)^{\frac{1}{2}}\big(u(\tau)\big)^{\frac{1}{2}}\Big]d\tau\Big\}ds, \qquad (8)$$

где

$$c_{**}=c_*+\int_{t_0}^{\infty}\big(q_1(s)\big)^2\,ds<\infty.$$

Применяя к интегральному неравенству (8) лемму 1 [5] и учитывая условия 2) – 4), получаем, что $x(t)=O(1)$, $y_k(t)=O(1)$ $(k=1,2,3,4)$. Из соотношений 2), 6) – 8) [8] в силу условия 5) получаем, что $x^{(k)}(t)=O(1)$ $(k=1,2,3,4)$ для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), что завершает доказательство теоремы.

Приведем простейший пример, используя пример из [8].

ПРИМЕР. Для ИДУ пятого порядка

$$x^{(5)}(t)+\left[10+(t+4)^2+E(t)\right]x^{(4)}(t)+\left[35+6(t+4)^2+6E(t)-e^{-2t}\right]x'''(t)+$$

$$+\left[50+11(t+4)^2+11E(t)-3e^{-2t}+\frac{e^{-2t}}{(t+1)^2}\right]x''(t)+\left[24+6(t+4)^2+6E(t)-2e^{-2t}-\right.$$

$$\left.-e^{-3t}\sin(t^2+1)^{-1}\right]x'(t)+e^{-4t}\left[3-\frac{10\cos t}{(t+2)^2}\right]x(t)+\int_0^t\left\{e^{-4t}\left[\frac{1}{(t+\tau+1)^2}+\frac{e^{-t}}{t+\tau+2}\right]x(\tau)+\right.$$

$$+\left[6Q_4(t,\tau)+\frac{e^{-4t+2\tau}\sin(t\tau)}{e^t+e^\tau+1}+e^{-5t-\tau}\right]x'(\tau)+\left[11Q_4(t,\tau)+\frac{e^{-4t+2\tau}\sin(t\tau)}{e^t+e^\tau+1}\right]x''(\tau)+$$

$$\left.+6Q_4(t,\tau)x'''(\tau)+Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)\right\}d\tau=\frac{e^{-4t+t\sin t}}{t+5}+e^{-4t}\left[5+\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right],\ t\ge 0,$$

где $E(t)\equiv\exp\left(t^5\left(\sin t\right)^{\frac{1}{7}}\right)$,

$$Q_4(t,\tau)\equiv e^{-4t+4\tau}\left\{\left[\exp\left(\frac{\cos t}{(t+2)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+4}\right\}e^{t\sin t+\tau\cos t}+e^{-4t+4\tau}\left[\frac{1}{(t+\tau+2)^2}-\frac{1}{(t+\tau+3)^3}\right],$$

выполняются все условия теоремы при

$$W_1(t)\equiv W_2(t)\equiv W_3(t)\equiv W_4(t)\equiv e^{-t},$$

здесь

$$t_0=0,\ b_4(t)\equiv(t+4)^2+E(t),\ b_3(t)\equiv -e^{-t},\ b_2(t)\equiv\frac{1}{(t+1)^2},\ b_1(t)\equiv\sin(t^2+1)^{-1},\ b_0(t)\equiv 3-\frac{\cos t}{(t+2)^2},$$

$$b_{01}(t)\equiv 6(t+4)^{-1},\ b_{02}(t)=\frac{1}{2}(t+4),\ b_{03}(t)=-\frac{\cos t}{(t+2)^2},\ P_0(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+1)^2}+\frac{e^{-t}}{t+\tau+2},$$

$$P_{01}(t,\tau)\equiv\frac{2(t+4)^{-1}}{t+\tau+1},\ P_{02}(t,\tau)\equiv\frac{t+4}{2(t+\tau+1)},\ P_{03}(t,\tau)\equiv\frac{e^{-t}}{t+\tau+2},\ P_1(t,\tau)\equiv\frac{e^{-t}\sin(t\tau)}{e^t+e^\tau+1},$$

$$P_2(t,\tau)\equiv\frac{\sin(t\tau)}{e^t+e^\tau+1},\ P_3(t,\tau)\equiv 0,\ P_4(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+2)^2}-\frac{1}{(t+\tau+3)^3},\ n=1,\ \psi_1(t)\equiv e^{t\sin t},$$

$$K(t,\tau)\equiv\left\{\left[\exp\left(\frac{\cos t}{(t+2)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+4}\right\}e^{t\sin t+\tau\sin\tau},\ R_1(t,\tau)\equiv\left[\exp\left(\frac{\cos t}{(t+2)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+4},$$

$$A_1(t)\equiv\exp\left(\frac{\cos t}{2(t+2)^2}\right),\ B_1(t)=\frac{1}{t+4},\ A_1^*(t)=\frac{t+3}{(t+2)^3},\ R_1^*(t)=\frac{t+3}{(t+2)^3},\ P_{41}(t,\tau)\equiv\frac{2(t+4)^{-1}}{t+\tau+2},$$

$$P_{42}(t,\tau)\equiv\frac{t+4}{2(t+\tau+2)},\ P_{43}(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+3)^3},\ f_1(t)\equiv\frac{1}{t+5}e^{t\sin t},\ E_1(t)=\frac{1}{t+5},$$

$$c_1(t)\equiv\frac{1}{t+4},\ \tilde{q}(t)\equiv 5+\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2,\ q_1(t)\equiv 10(t+4)^{-1},\ q_2(t)\equiv\frac{1}{2}(t+4),\ q_3(t)\equiv\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2,$$

$$\Delta(t)\equiv\frac{(t+4)^2}{4}\left[\frac{6t+5}{2(t+1)}+\frac{3t+5}{t+2}+\frac{1}{2t+1}\right]+2E(t)>0.$$

Поэтому любое решение приведенного ИДУ пятого порядка устойчиво при $t\in R_+=[0,\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказанной теоремы при $Q_k(t,\tau)\equiv 0\ \ (k=0,1,2,3,4)$, $f_i(t)\equiv 0\ \ (i=1..n)$ вытекают достаточные условия об устойчивости решений ДУ пятого порядка вида

$$x^{(5)}(t)+\sum_{k=0}^{4}a_k(t)x^{(k)}(t)=W(t)\left[q_1(t)q_2(t)+q_3(t)\right],\ t\ge t_0. \tag{9}$$

Сравнение с результатами других авторов, например, из [10, 11], показывает, что соответствующие результаты для ДУ (1^0) являются новыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выполнении условий теоремы все коэффициенты ИДУ (1) могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуинтервала J, что подтверждается, например, приведенным иллюстративным примером.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используя лемму 1 [12] можно получить достаточные условия, обеспечивающие следующее свойства:

$$\int_{t_0}^{t}y_4(\eta)d\eta=O(1). \tag{10}$$

Тогда из (5) интегрированием в пределах от t_0 до t, имеем равенство

$$y_3(t)=y_3(t_0)+\int_{t_0}^{t}W_4(s)y_4(s)ds,$$

из которого интегрированием по частям, получим

$$y_3(t)=y_3(t_0)+\int_{t_0}^{t}W_4(s)\left(\int_{t_0}^{s}y_4(\eta)d\eta\right)'ds=\ y_3(t_0)+W_4(t)\int_{t_0}^{t}y_4(\eta)d\eta-\int_{t_0}^{t}W_4'(s)\left(\int_{t_0}^{s}y_4(\eta)d\eta\right)ds. \tag{11}$$

Если потребуем условие $W_4'(t)\in L^1(J,R)$, то из (10) в силу (9) и условия (5) доказанной выше теоремы будем иметь $y_3(t)=O(1)$. Это означает, что используя (9), тоже можно изучить устойчивость решений ИДУ пятого порядка (1).

Литература

1. *Искандаров С.* Об устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2007. Вып. 36. С. 56–62.
2. *Искандаров С.* Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / С. Искандаров // Там же. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 34. С. 37–43.
3. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / С. Искандаров // Там же. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 36–40.
4. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
5. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.

6. *Искандаров С.* Об устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка / С. Искандаров, Е.А. Саламатина // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 34. С. 49–54.
7. *Искандаров С.* Нестандартный метод сведения к системе для устойчивости и стабилизируемости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / С. Искандаров // Там же. Бишкек: Илим, 2009. Вып. 40. С. 40–48.
8. *Комарцова Е.А.* Об устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка / Е.А. Комарцова, С. Искандаров // Там же. Бишкек: Илим, 2014. Вып. 46. С. 183–189.
9. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис… д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
10. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. М.: Мир, 1964. 477 с.
11. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. М.: Наука, 1990. 432 с.
12. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров // Вестник КРСУ. 2001. Т. 1. № 2. С. 46–53.