УДК 517.9

DOI: 10.36979/1694-500X-2021-21-8-10-14

СЕМЕЙСТВО ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА, ПРИВОДИМЫХ К ЛИНЕЙНЫМ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

В начальном курсе обыкновенных дифференциальных уравнений одно из центральных мест занимает изучение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) первого порядка. Обычно изучаются несколько методов решения таких уравнений, а также приемы, которые позволяют свести процесс решения уравнений Бернулли, некоторых видов уравнений Риккати к ЛОДУ первого порядка. В данной работе показано, что упомянутые уравнения, а также уравнения с разделяющимися переменными являются частными случаями некоторого семейства обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения Бернулли; уравнения с разделяющимися переменными; новый метод решения.

СЫЗЫКТУУГА КЕЛҮҮЧҮ БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ТОБУ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Кадимки дифференциалдык теңдемелердин баштапкы курсунда борбордук орундардын бирин биринчи тартиптеги сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелерди изилдөө ээлейт. Адатта, мындай теңдемелерди чечүүнүн бир нече ыкмалары, ошондой эле Бернулли теңдемелерин, Риккати теңдемелеринин айрым түрлөрүн биринчи даражадагы сызыктуу дифференциалдык теңдемелерге алып келүүгө мүмкүндүк берген ыкмалар изилденет. Бул эмгекте жогоруда аталган теңдемелердин бардыгы, ошондой эле өзгөрмөлөрү ажыроочу теңдемелер кадимки дифференциалдык теңдемелердин белгилүү бир тобунун өзгөчө учурлары экендиги көрсөтүлөт.

Түйүндүү сөздөр: биринчи тартиптеги сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелер; Бернулли теңдемелери; өзгөрмөлөрү ажыроочу кадимки дифференциалдык теңдемелер; чыгаруунун жаңы методу.

FAMILY OF ORDINARY FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS, REDUCED TO LINEAR

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

In the initial course of ordinary differential equations, one of the central places is occupied by the study of linear ordinary differential equations (LODE) of the first order. Usually, several methods for solving such equations are studied, as well as techniques that allow reducing the process of solving the Bernoulli equations, some types of Riccati equations to a first-order LODE. In this paper, it is shown that all the above equations are special cases of a certain family of ordinary differential equations.

Keywords: linear ordinary differential equations of the first order; Bernoulli equations; separable ordinary differential equations; new solution method.

Введение. В 2021 году исполняется 350 лет теории дифференциальных уравнений. Известно, что еще в 1671 г. во второй главе своей работы “Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum” Исаак Ньютон перечислил три вида дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f(x); \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y); \qquad (2)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y \qquad (3)$$

и привел решения этих уравнений [1]. Критически настроенный “серьезный” ученый может сказать по поводу уравнения (1): “Какое же это уравнение? Это же формулировка простого упражнения на интегрирование”. Можно согласиться с тем, что в виде (1) можно задавать упражнения на интегрирование. Но, в то же время, очень часто процесс решения обыкновенного дифференциального уравнения, используя некоторые преобразования, можно привести к одному или, в случае уравнений высоких порядков или систем, к нескольким операциям интегрирования. Такие методы – мы называем их методами прямого интегрирования – позволяют успешно решать линейные уравнения высоких порядков методом Цепочка [2, 3], системы линейных уравнений – с использованием интегрируемых комбинаций [4]. В данной статье обсуждаются дифференциальные уравнения первого порядка, которые можно решить, используя “прямое” интегрирование – приведя к виду (1).

1. Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое можно привести к виду:

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad (4)$$

где y – неизвестная функция, зависящая от аргумента x, коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ – заданные функции.

Для решения уравнения (4) обычно используют метод вариации произвольной постоянной и способ подстановки [5].

Рассмотрим метод прямого интегрирования. Для этого достаточно заметить, что в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции, имеет место равенство: $y' + a(x)y = \left(ye^{\int a(x)dx}\right)' e^{-\int a(x)dx}$.

Поэтому уравнение (4) можно решить, “свернув” левую часть, а затем, последовательно перенося множители в правую часть уравнения и интегрируя.

Пример 1

Решим уравнение:

$$\sin x \cdot y' = \cos x \cdot y + 1924 \cdot \sin^2 x .$$

Решение

Сначала перепишем уравнение в стандартном виде – в виде (4): $y' - ctgx \cdot y = 1924 \cdot \sin x$. Теперь свернем левую часть полученного уравнения. Так как

$$\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x = \ln|\sin x| + C$$

получаем, что $e^{\int ctgx dx} = A\sin x$; $\quad e^{-\int ctgx dx} = A/\sin x$, то есть уравнение может быть записано в виде $\left(\frac{y}{\sin x}\right)' \sin x = 1924 \sin x$.

Поэтому, $\left(\frac{y}{\sin x}\right)' = 1924 \Rightarrow \frac{y}{\sin x} =$

$$= 1924x + C_1 \Rightarrow y = (1924x + C_1)\sin x.$$

Замечание

1. Так как постоянная интегрирования всегда будет стоять как в числителе, так и в знаменателе, и соответственно будет сокращаться, всегда можно считать, что $A = 1$.

2. Уравнением с разделяющимися переменными называется обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно привести к виду:

$$y' = g(y)b(x), \qquad (5)$$

где y – неизвестная функция, зависящая от аргумента x; $g(y)$, $b(x)$ – заданные функции.

Перепишем уравнение (5) в виде $y'/g(y) = b(x)$ и введем обозначение: $Y(x) = \int \frac{1}{g(y)} dy$. Тогда $Y'(x) = \frac{1}{g(y)} \cdot y'(x)$, и уравнение (5) запишется в виде, допускающем прямое интегрирование: $Y'(x) = b(x)$ [6].

Пример 2

Решим уравнение: $2xyy' = 1 + y^2$.

Решение

Разделим переменные: $\frac{2yy'}{1+y^2} = \frac{1}{x}$. Новая функция $Y(x) = \int \frac{2y}{1+y^2} dy$ позволяет переписать уравнение в виде: $Y' = \frac{1}{x} dx$. Проинтегрируем, и получим решение:

$$\int \frac{2y}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln(1+y^2) + \ln C =$$

$$= \ln|x| \Leftrightarrow x = C(1+y^2).$$

3. Прием, использованный в предыдущем пункте, позволяет перейти к основному утверждению данной работы:

Теорема

Уравнение

$$y' + a(x)g(y)\int \frac{1}{g(y)}dy = b(x)g(y) \qquad (6)$$

путем замены переменной $z(x) = \int \frac{1}{g(y)}dy$ сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению: $z' + a(x)z = b(x)$ – уравнению вида (4).

Доказательство

Перепишем (6) в виде

$\frac{1}{g(y)} \cdot y' + a(x)\int \frac{1}{g(y)}dy = b(x)$, используем замену переменной $z(x) = \int \frac{1}{g(y)}dy$, и поскольку $z' = \frac{1}{g(y)} \cdot y'$, уравнение (6) примет вид: $z' + a(x)z = b(x)$.

4. Сделаем несколько выводов, которые можно непосредственно получить из уравнения (6).

Уравнение (6) при *a(x)* тождественно равному нулю и является уравнением с разделяющимися коэффициентами.

Уравнение (6) при *g(y)* = 1 является ЛОДУ первого порядка.

Уравнение (6) при $g(y) = y^n$, $n \neq 1$ является уравнением Бернулли.

Для того чтобы доказать последнее утверждение, достаточно знать, что $\int \frac{1}{y^n}dy = \frac{y^{1-n}}{1-n} + C$.

Поэтому, уравнение $y' + a(x)y^n \int \frac{1}{y^n}dy = b(x)y^n$

перепишется в виде:

$$y' + y^n\left(\frac{y^{1-n}}{1-n} + C\right)a(x) = b(x)y^n \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow y' + \frac{y}{1-n}a(x) = [-Ca(x) + b(x)]y^n .$$

Понятно, что последнее уравнение является уравнением Бернулли. Стоит заметить, что прием, с помощью которого доказана теорема, соответствует приему, который используется при решении уравнений Бернулли [5].

5. В предыдущем пункте, обсуждая уравнения Бернулли, мы исключили случай $g(y) = y$. Давайте восполним этот пробел. Итак, рассмотрим уравнение $y' + a(x)y\int \frac{1}{y}dy = b(x)y$. Так как $\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C$, уравнение можно записать в виде: $\frac{y'}{y} + a(x)\ln y = b(x)$. Далее, пользуемся тем, что $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$, и, введя обозначение $\ln y = Y(x)$, получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение: $Y' + a(x)Y = b(x)$.

Использование методов прямого интегрирования позволяет избежать методов, необходимых при стандартном построении курса, но, по нашему мнению, излишних для потребителей дифференциальных уравнений, рассуждений о линейной независимости, пространстве решений и т. п. Для того чтобы подкрепить тезис о пользователях, приведем пару примеров на использование дифференциальных уравнений. Их особенностью является упор на концепцию прямого интегрирования.

6. Логично предполагать, что скорость распространения информации в ограниченном сообществе пропорциональна количеству владеющих этой информацией, а также количеству тех, до кого эта информация еще не дошла.

Поэтому, соответствующее уравнение будет:

$$\frac{du}{dt} = ku(t)(N - u(t)) . \qquad (7)$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности; $u(t)$ – количество владеющих этой информацией на момент времени t; N – размер сообщества.

Уравнения вида (7) используются не только для моделирования скорости распространения информации. С не меньшим успехом их используют для моделирования и других процессов, в частности, при изучении актуального для современного мира процесса распространения инфекции. График функции, являющейся решением уравнения (7), называют логистической кривой. В данном пункте мы рассмотрим пример [7] на использование таких уравнений. Особенностью данного рассмотрения будет не совсем стандартный подход к интегрированию.

Для того чтобы решить уравнение (7), разделим переменные:

$$\frac{du}{u(N-u)} = kdt$$

и проинтегрируем.

Числовой пример.

Речь вождя племени Мумба-Юмба, в которой он велел отменить коррупцию, слушали две тысячи человек. Через один час об этом знали пять тысяч. Сколько человек будет знать об этом через три часа, если всего в племени 25 тысяч человек?

Итак, имеют место уравнение $\frac{du}{dt} = ku(t)(25 - u(t))$ и условия: $u(0) = 2$; $u(1) = 5$; $u(3) = ?$

Для того чтобы решить уравнение (7), нужно разделить переменные $\frac{du}{u(25-u)} = kdt$ и проинтегрировать. Обычно для вычисления таких интегралов используют метод неопределенных коэффициентов. Мы предлагаем воспользоваться другим методом, который, по нашему мнению, больше соответствует духу прямого интегрирования:

$\int \frac{du}{u(25-u)}$ = (*разделим числитель и знаменатель на* u^2) = $\int \frac{(1/u^2)du}{(25/u-1)}$ *и используем то, что* $(1/u^2)du = -d(1/u)$. *Тогда,* $\int \frac{du}{u(25-u)} =$

$$= \int \frac{(1/u^2)du}{25/u-1} = -\int \frac{d(1/u)}{25/u-1} = -\frac{1}{25}\int \frac{d(25/u-1)}{25/u-1} =$$

$$= -\frac{1}{25}\ln|25/u-1| + \ln C.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения может быть записано в виде:

$$-\frac{1}{25}\ln|25/u-1| + \ln C = kt \Rightarrow \frac{25}{u} - 1 =$$

$$Ae^{-25kt} \Rightarrow u = \frac{25}{Ae^{-25kt}+1}.$$

Для того чтобы определить значения параметров A и k, воспользуемся условиями $u(0) = 2$:

$$2 = u(0) = \frac{25}{Ae^{-25k\cdot 0}+1} \Rightarrow 2A + 2 = 25 \Rightarrow A = 11{,}5,$$

и $u(1) = 5$:

$$5 = u(1) = \frac{25}{11{,}5e^{-25k\cdot 1}+1} \Rightarrow 57{,}5e^{-25k} = 20 \Rightarrow e^{25k} = 2{,}875.$$

Тогда,

$$u(t) = \frac{25}{Ae^{-25kt}+1} = \frac{25e^{25kt}}{A+e^{25kt}} = \frac{25(2{,}875)^t}{11{,}5+(2{,}875)^t}.$$

Итак, число $u(t)$ – число тех, до кого дошла информация к моменту времени t определяется функцией: $u(t) = \frac{25(2{,}875)^t}{11{,}5+(2{,}875)^t}$.

В частности, через три часа новость услышат:

$$u(3) = \frac{25(2{,}875)^3}{11{,}5+(2{,}875)^3} \approx 16{,}847,$$

то есть, примерно, 16 тысяч 847 человек.

7. Экономическая модель [7] предполагает, что изменение капитала на душу населения $k(t)$ определяется уравнением:

$$k' = sy(t) - nk(t),$$

где $y(t)$ – ВВП на душу населения; s – норма сбережения; n – норма роста рабочей силы.

Пусть $y(t) = 2k^{0,2}$; $s = 0{,}2$; $n = 0{,}05$; $k(0) = 1$.

Тогда имеет место уравнение Бернулли: $k' + 0{,}05k = 0{,}4k^{0,2}$.

Свернем левую часть: $(ke^{0,05t})'e^{-0,05t} = 0{,}4k^{0,2}$, и, обозначив $ke^{0,05t} = z$, получим уравнение с разделяющимися переменными: $z' = 0{,}4z^{0,2}e^{0,04t}$. Разделим переменные: $z^{-0,2}dz = 0{,}4e^{0,04t}dt$, и проинтегрировав, получим $z^{0,8} = 8e^{0,04t} + A$. Подставим вместо z его значение $z = ke^{0,05t}$, и получим выражение для $k(t)$: $k^{0,8} = 8 + Ae^{-0,04t}$, и воспользовавшись начальным условием $k(0) = 1$, получим: $1 = 8 + A$.

Отсюда, $A = -7$ и $k = (8 - 7e^{-0,04t})^{1,25}$.

Полученный результат, в частности, позволяет утверждать, что если модель верна и условия в течение длительного времени не изменятся, то величина капитала на душу населения $k(t)$ стабилизируется на уровне $8^{1,25} = 13{,}4543$.

Заключение. Результаты работы показывают, что почти все обыкновенные дифференциальные уравнения вида (2), интегрируемые в квадратурах, можно привести к виду (1), то есть они являются уравнениями, допускающими прямое интегрирование. В ряде работ [2–4], показано, что методы прямого интегрирования хорошо работают и в случае линейных дифференциальных уравнений высоких порядков, а также в случае линейных систем. По нашему мнению, использование методов прямого интегрирования предпочтительнее при обучении специалистов, которые используют дифференциальные уравнения в практической деятельности.

Лтература

1. Дифференциальное уравнение. URL: https://ru.qaz.wiki/wiki/ Differential_equation (дата обращения: 5.04.2021).
2. *Кыдыралиев С.К.* Преимущества метода цепочки при решении линейных дифференциальных и разностных уравнений / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 16–20.
3. *Кыдыралиев С.К.* Формула решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 11–15.
4. *Kydyraliev S.K.* Direct Integration of Systems of Linear Differential and Difference Equations / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // University of Niˇs, Serbia, Filomat 33:5 (2019). Pp. 1453–1461.
5. *Финкель Л.А.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Л.А. Финкель. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. 188 с.
6. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 232 с.
7. *Bailey D.* Mathematics in Economics / D. Bailey. Bercshire, England: McGraw-Hill Inc., 1998. 485 p.