УДК 517.98

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРА ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Сейдакмат к. Э., А. Керимбеков

Рассматриваются задачи граничного оптимального управления тепловым процессом, описываемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями и исследована скорость сходимости приближений с влиянием параметра ядра интегрального оператора. Отмечено влияние числовых параметров ядра интегрального оператора на скорость сходимости приближений оптимального управления и оптимального процесса. Установлено, что наличие интегрального оператора Вольтерра в краевой задаче параболического типа значительно повлияло на построение приближенных решений нелинейного интегрального уравнения, оптимального управления и оптимального процесса. В частности, выявлено, что существуют приближения по резольвенте и конечномерные приближения оптимального процесса. Данное обстоятельство значительно изменило скорости сходимости конечномерного приближения процесса к точному решению оптимального процесса. Реализация численных значений приведена в таблицах.

Ключевые слова: функционал; краевая задача; приближение оптимального управления; приближения оптимального процесса; сходимость.

ВОЛЬТЕРРДИН ИНТЕГРАЛДЫК ОПЕРАТОРУНУН ЯДРОСУНУН ПАРАМЕТРИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШТАРДЫН ЖЫЙНАЛГЫЧТЫК ЫЛДАМДЫГЫНА ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИ

Сейдакмат к. Э., А. Керимбеков

Вольтеррдин интегралдык-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлүүчү жылуулук процессин чектик оптималдуу башкаруу маселеси каралат жана интегралдык оператордун ядросунун параметринин өзгөрүүсү менен жакындаштырылган чыгарылыштардын жыйналгычтык ылдамдыгы изилденген. Интегралдык оператордун ядросунун сандык параметрлеринин оптималдуу башкаруунун жана оптималдуу процесстердин жыйналгычтык ылдамдыгына тийгизген таасири жөнүндөгү маселеге негизги көңүл бурулат. Параболикалык типтеги чектик маселеде Вольтеррдик интегралдык оператордун болушу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин, оптималдуу башкаруунун жана оптималдуу процесстердин жакындаштырылган чыгарылыштарын түзүүдө олуттуу таасирин тийгизгендигин белгилей кетүү керек. Атап айтканда, оптималдуу процесстин резольвента боюнча жана чектүү ченемдүү жакындаштырылган чыгарылыштары бар экендигин аныктадык. Бул жагдай оптималдуу процесстин чектүү ченемдүү жакындаштырылган чыгарылыштын анык чыгарылышка болгон жыйналгычтык ылдамдыгын олуттуу өзгөрттү. Сандык маанилердин ишке ашыруусу таблицаларда көрсөтүлгөн.

Түйүндүү сөздөр: функционал; чектик маселе; оптималдуу башкаруунун жакындашуусу; оптималдуу процесстин жакындашуулары; жыйналгычтык.

ON PARAMETER INFLUENCE OF THE KERNEL OF VOLTERRA INTEGRAL OPERATOR ON THE CONVERGENCE RATE OF APPROXIMATE SOLUTIONS

Seidakmat k. E., A. Kerimbekov

The problems of boundary optimal control of the thermal process described by Voltaire integro-differential equations are considered and the convergence rate of approximations with the influence of the kernel parameter of the integral operator is investigated. The influence of numerical parameters of the integral operator kernel on the convergence rate of approximations of optimal control and optimal process is noted. It is established that the presence of the Volterra integral operator in the boundary value problem of the parabolic type significantly influenced the construction of approximate solutions of the nonlinear integral equation, optimal control and optimal process. In particular, it is revealed that there are approximations by the resolvent and finite-dimensional approximations of the optimal process. This circumstance significantly changed the convergence rates of the finite-dimensional approximation of the process to the exact solution of the optimal process. The implementation of numerical values is given in the tables.

Keywords: functional; boundary value problem; approximation of optimal control; approximation of optimal process; convergence.

В статье рассматриваются задачи граничного оптимального управления тепловым процессом, описываемыми вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями и исследована скорость сходимости приближений с влиянием параметра ядра интегрального оператора. В работе [1] приведены основные теоретические результаты и выводы, полученные при решении задачи граничного оптимального управления тепловым процессом. Числовые значения скорости сходимостей приведены в таблицах 1–8.

Постановка задачи нелинейной оптимизации и ее решение. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется найти минимальное значение функционала:

$$J[u]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T u^2(t)\,dt,\quad \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1]:

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau+g(t,x),\ \ 0<x<1,\ \ 0<t\le T,$$

$$v(0,x)=\psi(x),\ \ 0<x<1, \tag{2}$$

$$v_x(t,0)=0,\ \ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=p\left[t,u(t)\right],\ \ 0<t\le T.$$

Здесь функция $v(t,x)\in H(Q)$ – состояние управляемого процесса; $u(t)\in H(0,T)$ – функция управления; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Решение краевой задачи определяется по формуле [1]:

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x), \tag{3}$$

где $v_n(t)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$v_n(t)=a_n(t)+\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)\,ds,$$

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)p\left[\tau,u(\tau)\right]\right)d\tau\ ;$$

$R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента ядра $K_n(t,s)=\int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)\,d\tau$ удовлетворяет оценке

$$\left|R_n\left(t,s,\lambda\right)\right| \le \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2}}, \quad n = 1,2,3,\dots .$$

На практике не всегда существует классическое решение, поэтому пользуются обобщенным решением [2] краевой задачи (2). В работах [1, 3] найдено обобщенное решение краевой задачи (2) из гильбертова пространства $H(Q)$, $Q = (0,1)\times(0,T)$.

В данном исследовании использованы обозначения работы [1].

Данные для численной реализации:

1. T = 1.

2. $\xi(x) = \xi_0(x-1)$, $0 \le x \le 1$.

3. $K(t,\tau) = t+\tau$, $K_0 = \sup\limits_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right| = \mu\left(|t|+|\tau|\right) = 2\mu$; $\lambda = 1$.

4. $g(t,x) = 0{,}04 * \left(x^2 + t\right)$.

5. $\psi(x) = x-1$, $0 \le x \le 1$.

6. $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.8$.

7. $p\left[t,u(t)\right] = \ln\sqrt{u^2(t)+1}$, $-1 \le u(t) \le 1$.

Найдена производная функции $p\left[t,u(t)\right]$:

$$p_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{u(t)}{p_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u = \frac{u(t)}{u^2(t)+1}2u = 2\frac{u^2(t)}{u^2(t)+1} > 0, \ \forall u(t).$$

А также вычислена:

$$p_0 = \max_{\substack{u(t)\\0\le t\le T}}\left|p_u\left[t,u(t)\right]\right| = 0.5 .$$

8. $\beta u(t)\, p_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = \beta\left(u^2(t)+1\right) = \theta(t)$, $\beta < \theta(t) \le 2\beta$, $0 \le t \le 1$.

9. Оптимальное управление находится по формуле:

$$u(t) = \varphi\left[t,\theta(t),\beta\right] = \pm\sqrt{\frac{\theta-\beta}{\beta}} \tag{4}$$

и определяется как

$$\varphi_0(\beta) = \max_{\substack{\theta(t)\\0\le t\le T}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{\beta}\sqrt{\theta(t)-\beta}}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\beta}}\frac{1}{\sqrt{2\beta-\beta}} = \frac{1}{2\beta} = 0.625 .$$

10. Постоянная M_0 удовлетворяет оценке:

$$M_0 = \max_{0\le t\le T}\left(1-e^{-\lambda_n^2(T-t)}\right) \le 1 .$$

11. $\gamma = 1*0.5*\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda| K_0}{2\lambda_1^2}\right)<1$.

Таблица 1 – Значение γ при значениях $\mu = 1,2,3$

μ	1	2	3
γ	0.514572	0.715408	0.916245

12. Значения λ_n, $n = 1,2,3,...$ для расчета оценок следующие:

Таблица 2 – Значения λ_n, $n = 1,2,3,...$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	…
1.5000	4.5026	7.5127	10.5335	13.5668	…

13. Для построения оптимального управления сначала в пространстве $H(0,T)$ решаем операторное уравнение [1]:

$$\theta(t) = G[\theta(t)] + h(t). \tag{5}$$

На практике не всегда существует точное решение (5). Поэтому, в основном, ограничиваются нахождением $\theta_k(t)$ методом последовательных приближений:

$$\theta_k(t) = G[\theta_{k-1}(t)] + h(t), \quad k = 1,2,3,..., \; \theta_0(t) = h(t).$$

Сходимость приближений операторного уравнения. Приближенное решение операторного уравнения $\theta_k(t)$ удовлетворяет следующей оценке [1]:

$$\left\|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[\theta_0(t)]\right\|_{H(0,T)}, \quad k = 1,2,3,... .$$

Численная реализация показана в таблице 3.

Таблица 3 – Сходимость приближенных решений операторного уравнения

$\left\|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[\theta_0(t)]\right\|_{H(0,T)}$			
k \ μ	1	2	3
1	0.4745	1.4618	7.8263
2	0.2442	1.0458	7.1708
3	0.1256	0.7482	6.5702
4	0.0647	0.5353	6.0199
5	0.0333	0.3829	5.5157
6	0.0171	0.2739	5.0537
7	0.0088	0.1960	4.6305
8	0.0045	0.1402	4.2426
9	0.0023	0.1003	3.8873
10	0.0012	0.0718	3.5617

В столбцах приведены скорости сходимости приближений при заданных значениях μ. Например, для первого столбца точность ε = 0,1 обеспечивается на третьем приближении, для второго столбца – на девятом приближении.

Можно заметить, что с увеличением значения μ, скорость сходимости замедляется.

Приближение оптимального управления и его сходимость. Подставляя в формулу (4) $\theta_k(t)$, можно найти *k*-ое приближение оптимального управления [1]:

$$u_k(t) = \varphi[t, \theta_k(t), \beta], \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Для k-го приближения оптимального управления справедлива следующая оценка [1]

$$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} = \left\| \varphi\left[t, \overline{\theta}(t), \beta\right] - \varphi\left[t, \theta_k(t), \beta\right] \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| \overline{\theta}(t) - \theta_k(t) \right\|_{H(0,T)} .$$

В таблице 4 показана численная реализация сходимости оптимального управления.

Таблица 4 – Сходимость *k*-го приближения оптимального управления

$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| \overline{\theta}(t) - \theta_k(t) \right\|_{H(0,T)}$			
k \ μ	1	2	3
1	0.2942	0.9063	4.8523
2	0.1514	0.6484	4.4459
3	0.0779	0.4639	4.0735
4	0.0401	0.3319	3.7323
5	0.0206	0.2374	3.4197
6	0.0106	0.1698	3.1333
7	0.0055	0.1215	2.8709
8	0.0028	0.0869	2.6304
9	0.0014	0.0622	2.4101
10	7.4412e-04	0.0445	2.2083

В столбцах приведены скорости сходимости приближений при заданных значениях μ. Например, для первого столбца точность ε = 0,04 обеспечивается на четвертом приближении, для второго столбца – на десятом приближении.

Можно заметить, что с увеличением значения μ скорость сходимости замедляется.

Приближения оптимального процесса. Подставляя в (3) $u_k(t)$, находим:

$$v_k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^t R_n(t,s,\lambda) a_n^{(k)}(s)\, ds + a_n^{(k)}(t) \right) z_n(x),$$

$$a_n^{(k)}(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1)\, p\left[\tau, u(\tau)\right] \right) d\tau ,$$

которое назовем *k*-м приближением оптимального процесса.

При исследовании сходимости оптимального процесса появляется сходимость по резольвенте:

$$\nu_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)\,ds+a_n^{(k)}(t)\right)z_n(x),$$

которое назовем *k, m*-м приближением оптимального.

Поскольку $\nu_k^m(t,x)$ является суммой бесконечного ряда, на практике используют усеченный ряд вида:

$$\nu_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left(\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)\,ds+a_n^{(k)}(t)\right)z_n(x),$$

которое назовем *k, m, r*-м приближением оптимального процесса.

Приближения оптимального процесса и их сходимость

I. *Сходимость k-го приближения оптимального процесса. Для k*-го приближения оптимального процесса имеет место [1]

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\sqrt{2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\lambda^2T^2\left[\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right]^2\right)}\,p_0\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

В таблице 5 показана численная реализация сходимости *k*-го приближения оптимального процесса.

Таблица 5 – Сходимость *k*-го приближения оптимального процесса

$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)\right\|_{H(Q)}$			
k \ μ	1	2	3
1	0.3444	0.4870	0.5965
2	0.1953	0.2761	0.3382
3	0.1107	0.1566	0.1918
4	0.0628	0.0888	0.1087
5	0.0356	0.0503	0.0617
6	0.0202	0.0285	0.0350
7	0.0114	0.0162	0.0198
8	0.0065	0.0092	0.0112
9	0.0037	0.0052	0.0064
10	0.0021	0.0030	0.0036

В столбцах приведены скорости сходимости приближений при заданных значениях μ. Однако следует заметить, что с увеличением значения μ, скорость сходимости незначительно замедляется.

II. *Сходимость k, m-го приближения оптимального процесса. Для k*, *m*-го приближения оптимального процесса имеет место [1]

$$\left\|\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le C_2(\lambda)\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}\frac{1}{m!}\left[\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right]^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}0,\quad\forall k=1,2,3,\ldots,$$

где

$$C_2(\lambda)=\lambda T\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left[\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+T\|g(\tau,x)\|^2_{H(Q)}+2T\|p[\tau,u_k(\tau)]\|^2_{H(0,T)}\right]}.$$

В таблице 6 показана численная реализация сходимости *k, m*-го приближения оптимального процесса.

Таблица 6 – Сходимость *k, m*-го приближения оптимального процесса

$\|\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)\|_{H(Q)}$			
k \ μ	1	2	3
1	0.0218	0.0673	0.3602
2	0.0112	0.0481	0.3301
3	0.0058	0.0344	0.3024
4	0.0030	0.0246	0.2771
5	0.0015	0.0176	0.2539
6	7.8795e-04	0.0126	0.2326
7	4.0546e-04	0.0090	0.2131
8	2.0864e-04	0.0065	0.1953
9	1.0736e-04	0.0046	0.1789
10	5.5244e-05	0.0033	0.1639

В столбцах приведены скорости сходимости приближений при разных значениях μ. Однако следует заметить, что с увеличением значения μ, скорость сходимости незначительно замедляется.

III. *Сходимость k, m, r-го конечного приближения. Для k, m, r*-го приближения оптимального процесса имеет место [1]

$$\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\|_{H(Q)}\le\sqrt{C_3(\lambda)}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\quad\forall k,m=1,2,3,\dots,$$

где

$$C_3(\lambda)=3\left(1+\lambda^2T^2\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2\right)\sqrt{\left[\|\psi(x)\|^2_H+T\|g(\tau,x)\|^2_H+2T\|p[\tau,u_k(\tau)]\|^2_H\right]}.$$

В таблице 7 показана численная реализация сходимости *k, m, r*-го приближения оптимального процесса.

В столбцах приведены скорости сходимости приближений при заданных значениях μ. Например, для первого столбца точность ε = 0,7 обеспечивается на втором приближении, для второго столбца – на четвертом, а для третьего столбца – на пятом приближении.

IV. *Сходимость k, m, r-го конечного приближения к оптимальному процессу. Для k, m, r*-го приближения к оптимальному процессу имеет место [1]

$$\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\|_{H(Q)}\le\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)\|_{H(Q)}+$$
$$+\|\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)\|_{H(Q)}+\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\|_{H(Q)}\xrightarrow[k,m,r\to\infty]{}0.$$

Таблица 7 – Сходимость *k, m, r*-го приближения оптимального процесса

$\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)}$			
k \ μ	1	2	3
1	1.1700	1.6546	2.0264
2	0.7165	1.0132	1.2409
3	0.5515	0.7800	0.9553
4	0.4625	0.6540	0.8010
5	0.4053	0.5732	0.7020
6	0.3648	0.5159	0.6319
7	0.3343	0.4727	0.5790
8	0.3102	0.4387	0.5373
9	0.2907	0.4111	0.5035
10	0.2744	0.3880	0.4752

В таблице 8 показана численная реализация сходимости *k, m, r*-го приближения к оптимальному процессу.

Таблица 8 – Сходимость *k, m, r*-го приближения к оптимальному процессу

$\left\| v^0(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)}$			
k \ μ	1	2	3
1	1.5362	2.2089	2.9831
2	0.9230	1.3375	1.9092
3	0.6680	0.9710	1.4495
4	0.5282	0.7675	1.1869
5	0.4424	0.6411	1.0175
6	0.3858	0.5571	0.8994
7	0.3461	0.4979	0.8119
8	0.3169	0.4544	0.7439
9	0.2945	0.4209	0.6888
10	0.2765	0.3943	0.6428

В столбцах приведены скорости сходимости приближений при заданных значениях μ. Например, для первого столбца точность $\varepsilon = 0{,}9$ обеспечивается на втором приближении, для второго столбца – между третьим и четвертом приближениями, а для третьего столбца – на шестом приближении.

Можно заметить, что с увеличением значения μ, скорость сходимости замедляется.

Выводы. Численная реализация получена с использованием результатов работ [1, 3], а также с использованием структуры построения приближений оптимального процесса, описанного в работе [4].

Значения столбцов показывают скорость сходимости приближений при заданных значениях μ. При этом можно заметить, что с увеличением значения μ скорость сходимости замедляется.

Литература

1. *Сейдакмат кызы Э.* Приближенное решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / Э. Сейдакмат кызы // Вестник КРСУ. 2014. Т. 14. № 12. С. 80–86.

2. *Керимбеков А.* Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 8. С. 10–15.
3. *Seidakmat kyzy E*. Approximate solution of the boundary control problem of thermal processes described by Volterra integro-differential equations / E. Seidakmat kyzy, A. Kerimbekov // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Bishkek, 2014. Pp. 213–218.
4. *Керимбеков А.* О влиянии параметров задачи оптимального управления тепловыми процессами на скорость сходимости приближенных решений / А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Вестник КРСУ. 2019. Т. 19. № 4. С. 11–18.