УДК 517.923
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-4-4-10

# НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

***С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, О.Б. Забинякова***

*Аннотация.* Уравнениям Риккати в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, возможно, посвящено наибольшее количество работ. По нашему мнению, это объясняется двумя основными причинами. Во-первых, уравнения Риккати используются при математическом описании громадного количества задач алгебраической геометрии, теории вполне интегрируемых гамильтоновых систем, вариационном исчислении, теории конформных отображений, квантовой теории поля. Во-вторых, также, как и в случае Великой Теоремы Ферма, имеет место довольно простая формулировка задачи: требуется получить решения обыкновенного дифференциального уравнения $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ . Показано, что довольно широкий класс уравнений Риккати, которые можно проинтегрировать в квадратурах, можно выделить явным образом, использовав то, что правая часть уравнения является квадратным трехчленом относительно неизвестной функции.

*Ключевые слова:* обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения Риккати; интегрируемость в квадратурах; магнитотеллурический импеданс в одномерной геологической среде; новый метод решения.

# КВАДРАТУРАЛАРГА ИНТЕГРАЦИЯЛАНГАН АЙРЫМ РИККАТИ ТЕҢДЕМЕЛЕРИ

***С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, О.Б. Забинякова***

*Аннотация.* Кадимки дифференциалдык теңдемелер теориясында Риккати теңдемелерине, эң көп эмгектер арналышы мүмкүн. Биздин оюбузча, бул эки негизги себеп менен түшүндүрүлөт. Биринчиден, Риккати теңдемелери алгебралык геометриянын, толук интегралдык Гамильтон системаларынын теориясынын, вариациялардын эсептөөлөрүнүн, конформдык карталардын теориясынын жана талаанын кванттык теориясынын көп сандаган маселелерин математикалык сүрөттөөдө колдонулат. Экинчиден, Ферманын Улуу теоремасы сыяктуу эле, маселенин жөнөкөй туюндурмасы ишке ашат: кадимки дифференциалдык тендемени $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ чыгаруу талап кылынат. Квадратураларга интеграциялануучу Риккати теңдемелеринин кыйла кеңири классын, теңдеменин оң тарабы белгисиз функцияга салыштырмалуу квадраттык триномия экендигин колдонуп, бөлүп көрсөтүүгө болот.

*Түйүндүү сөздөр:* биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер; Риккати теңдемелери; квадратураларга интеграциялануу; бир өлчөмдүү геологиялык чөйрөдөгү магнитотеллуралык импеданс; чыгаруунун жаңы ыкмасы.

# SOME RICCATI EQUATIONS, INTEGRABLE IN QUADRATURES

***S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, O.B. Zabinyakova***

*Abstract.* The Riccati equations in the theory of ordinary differential equations are the subject of the largest number of works, perhaps. In our opinion, there are two main reasons for this popularity. Firstly, the Riccati equations are used in the mathematical description of a huge number of problems in algebraic geometry, the theory of completely integrable Hamiltonian systems, the calculus of variations, the theory of conformal mappings, quantum field theory. Secondly, just as in the case of Fermat's Last Theorem, there is a rather simple formulation of the problem: it is required to obtain solutions to an ordinary differential equation $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ . It is shown that a fairly wide class of Riccati equations that can be integrated in quadratures can be distinguished by explicitly using the fact that the right side of the equation is a quadratic trinomial with respect to an unknown function.

*Keywords:* first-order ordinary differential equations; Riccati equations; integrability in quadratures; magnetotelluric impedance in one-dimensional geological area; new method of solving.

**Введение.** Спустя всего несколько десятилетий после начала изучения обыкновенных дифференциальных уравнений Якопо Франческо Риккати и семейство Бернулли (Даниил, Иоганн, Николай-старший и Николай-младший) начали изучать уравнения, которые теперь называются уравнениями Риккати. Жозеф Лиувилль в 1841 г. доказал, что решение уравнений Риккати, представленных в общем виде, невозможно выразить в квадратурах от элементарных функций. При этом имеет место классический результат утверждающий, что если имеется частное решение уравнения Риккати, то элементарная подстановка позволяет преобразовать это уравнение в уравнение Бернулли [1, 2]. Таким образом, уравнение Риккати можно проинтегрировать в квадратурах, если знать любое его частное решение. В каком-то смысле это утверждение можно отнести к теоремам существования: оно говорит о возможности нахождения общего решения, и при этом не говорит о том, как найти это самое частное решение. Возможно, это обстоятельство породило громадное количество научных работ, посвященных способам нахождения решения уравнений Риккати в различных частных случаях [3, 4]. В данной работе авторы предлагают некий класс уравнений, который включает в себя значительную часть уравнений Риккати, которые можно проинтегрировать в квадратурах.

**1.** Упоминание уравнений Риккати, как правило, влечет за собой утверждение о возможности построения общего решения через частное.

**Теорема 1**

Если уравнение Риккати:

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \tag{1}$$

имеет частное решение $y_0$, замена $y = z + y_0$ позволяет получить уравнение Бернулли, которое интегрируемо в квадратурах.

Доказательство теоремы можно проиллюстрировать следующим примером.

**Задача.** Решить уравнение:

$$y' = \frac{6}{x^2} + \frac{9}{x}y + 4y^2. \tag{2}$$

**Решение**

Частное решение уравнения (2) можно найти в виде s/x. Для этого подставим s/x в уравнение, и получим: $-\frac{s}{x^2} = \frac{6}{x^2} + \frac{9s}{x^2} + \frac{4s^2}{x^2}$. Так как квадратное уравнение $4s^2 + 10s + 6 = 0$ имеет корень –1, уравнение (2) имеет частное решение –1/x. Таким образом, общее решение уравнения (2) можно искать в виде $y = z - \frac{1}{x}$. Подставив это выражение в (2), получим уравнение:

$$\left(z - \frac{1}{x}\right)' = \frac{6}{x^2} + \frac{9}{x}\left(z - \frac{1}{x}\right) + 4\left(z - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow z' - \frac{1}{x}z = 4z^2.$$

Это уравнение Бернулли можно переписать в виде:

$$(\frac{z}{x})'x = 4z^2 \Leftrightarrow (\frac{z}{x})' = 4(\frac{z}{x})^2 x \Leftrightarrow \frac{(z / x)'}{(z / x)^2} = 4x.$$

Отсюда, $-\frac{x}{z} = 2x^2 + C \Leftrightarrow z = -\frac{x}{2x^2 + C}$, и, как следствие, $y = -\frac{1}{x} - \frac{x}{2x^2 + C}$.

Значение теоремы 1, к сожалению, сильно ограничено тем, что часто неизвестно, где можно взять это самое решение $y_0$.

**2.** Итак, мы нуждаемся в неких утверждениях, которые могут позволить сделать заключение об интегрируемости уравнения (1) в зависимости от определенных свойств коэффициентов уравнения, типа

**Теорема 2**

Если алгебраическое уравнение $a(x) + b(x)y + c(x)y^2 = 0$ имеет корень y = C, где C является числом, то уравнение (1) разрешимо в квадратурах.

**Доказательство**

Несложно понять, что число C в данном случае является тем самым частным решением $y_0$, о котором шла речь в теореме 1.

**Задача 2.** *Решить уравнение:*

$$y' = x^3 - \left(4x^3 + \frac{4}{x}\right)y + \frac{16}{x}y^2. \tag{3}$$

Данное уравнение Риккати является интегрируемым в квадратурах, потому что оно имеет частное решение: $y = 0,25$. Уравнение (3) можно привести к линейному, поделив на $(y - 0,25)^2$: $\frac{y'}{(y - 0,25)^2} = \frac{(4/x) - 4x^3}{y - 0,25} + \frac{16}{x}$ и, произведя замену неизвестной функции $z = \frac{1}{y - 0,25}$. В результате получим линейное уравнение $z' + (\frac{4}{x} - 4x^3)z = \frac{-16}{x}$ с решением: $z = \frac{4}{x^4} + \frac{C}{x^4}e^{x^4}$. Следовательно, решение исходного уравнения: $y = \frac{x^4}{4 + Ce^{x^4}} + \frac{1}{4}$. Так как имело место деление на *(y – 0,25),* решением также является функция y = *0,25.*

**Замечание.** Полезно заметить, что способ, использованный при решении уравнения (3), годится для решения любых уравнений Риккати, одно из частных решений которых является числом.

**3.** Стоит обратить внимание на то, что общепринятый способ решения уравнений Риккати, основанный на замене вида $y = z + y_0$, использует тот факт, что в правой части уравнения $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ стоит квадратное относительно y выражение, только в неявной форме. Далее описывается множество уравнений Риккати, интегрируемых в квадратурах, при решении которых непосредственным образом используется наличие квадратичного выражения в правой части.

**Теорема 3**

Уравнение Риккати, которое можно записать в виде:

$$d(x)f(x)y' = a\left(f(x)y\right)^2 + \left(bf(x) - d(x)f'(x)\right)y + c, \tag{4}$$

где *a, b, c* – постоянные коэффициенты; *d(x), f(x)* – заданные функции, интегрируемо в квадратурах.

**Доказательство**

Если переписать уравнение (4) в виде:

$d(x)f(x)y' + d(x)f'(x)y = a\left(f(x)y\right)^2 + bf(x)y + c$ и ввести обозначение $u = f(x)y$, то получится уравнение с разделяющимися переменными: $d(x)u' = au^2 + (b+1)u + c$.

Рассмотрим соответствующий пример.

**Задача 3.** Решить уравнение:

$$y' = sinx \cdot y^2 + (6 - ctgx)y + \frac{5}{sinx}.$$

Умножим уравнение на $\sin x$: $sinx \cdot y' = sin^2 x \cdot y^2 + (6sinx - cosx)y + 5$; добавим к обеим частям $cosx \cdot y$: $sinx \cdot y' + cosx \cdot y = sin^2 x \cdot y^2 + 6sinx \cdot y + 5$, и использовав обозначение $u = sinx{\cdot}y$, получим: $u' = u^2 + 6u + 5$.

Таким образом, имеет место равенство: $\int \frac{du}{(u + 1)(u + 5)} = \int dx$. Поэтому, $ln\frac{u + 1}{u + 5} = 4x + C$. Таким образом, общее решение уравнения: $ln\frac{y \cdot sinx + 1}{y \cdot sinx + 5} = 4x + C$.

**4.** Конечно, уравнения вида (4) имеют весьма замысловатый вид, и при рассмотрении произвольного дифференциального уравнения возможно будет сложно увидеть, относится ли оно к данному виду или нет. В то же время оказывается, что уравнениями вида (4) являются довольно часто встречающиеся уравнения. В этом пункте рассмотрим уравнения Риккати, соответствующие уравнениям Эйлера, которые мы предлагаем называть уравнениями Эйлера–Риккати.

**Теорема 4**

Уравнение Эйлера–Риккати:

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}, \tag{5}$$

где *a, b, c* – постоянные коэффициенты, интегрируемо в квадратурах.

**Доказательство**

Можно, как при решении задачи 1, пойти традиционным путем – достаточно убедиться в том, что уравнения вида (5) имеют частное решение *s/x*, где значение *s* можно получить из уравнения: $-\frac{s}{x^2} = \frac{as^2}{x^2} + \frac{bs}{x^2} + \frac{c}{x^2}$, и используя замену $y = z + s/x$, получить уравнение Бернулли, а затем линейное уравнение первого порядка.

Мы используем иной подход.

Умножив уравнение (5) на $x^2$, получим уравнение $x^2 y' = ax^2 y^2 + bxy + c$, правая часть которого является квадратным трехчленом относительно неизвестной функции xy. Но что делать с левой частью? На помощь приходит следующее преобразование. Добавим к левой и правой частям уравнения слагаемое xy: $x^2 y' + xy = a(xy)^2 + (b + 1)xy + c$, и преобразуем его левую часть: $x^2 y' + xy = x(xy' + y) = x(xy)'$. В итоге, получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u = xy$: $xu' = au^2 + (b + 1)u + c$.

**Задача 4.** Решить уравнение Эйлера–Риккати: $y' = y^2 - \frac{9}{x}y + \frac{15}{x^2}$.

Следуя изложенному выше алгоритму, умножим уравнение на $x^2$: $x^2 y' = x^2 y^2 - 9xy + 15$, добавляем к обеим частям xy: $x^2 y' + xy = x^2 y^2 - 8xy + 15$, и, используя обозначение $u = xy$, получим: $xu' = u^2 - 8u + 15$. Таким образом, имеет место равенство:

$$\int \frac{du}{u^2 - 8u + 15} = \int \frac{dx}{x}. \tag{6}$$

Так как

$$\int \frac{du}{u^2 - 8u + 15} = \int \frac{du}{(u-3)(u-5)} = \int \frac{\frac{1}{(u-3)^2}du}{1 \cdot \frac{u-5}{u-3}} = \int \frac{-d\frac{1}{(u-3)}}{1 - \frac{2}{u-3}},$$

обозначим $\frac{1}{u-3} = v$, и получим:

$$\int \frac{du}{u^2 - 8u + 15} = \int \frac{dv}{2v - 1} = \frac{1}{2} ln\left|v - 0,5\right| + A = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1}{u-3} - 0,5\right| + A.$$

Поэтому, возвращаясь к исходным обозначениям, из (6) получаем:

$$\frac{1}{xy - 3} - 0,5 = x^2C \Leftrightarrow \frac{1}{xy-3} = \frac{2x^2C + 1}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{2}{2x^2C + 1} + 3.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения: $y = \frac{2}{2x^3C + x} + \frac{3}{x}$.

Имеет смысл подчеркнуть, что предложенный метод решения успешно работает при любых значениях коэффициентов *a, b, c*.

**5.** Следует отметить, что рассуждения, использованные при решении уравнений вида (4), могут быть применены и в некоторых других случаях.

**Теорема 5**

Уравнение Риккати вида:

$$y' = ax^q y^2 + b\frac{y}{x} + \frac{c}{x^{q+2}}, \tag{7}$$

где *a, b, c, q* – постоянные коэффициенты, интегрируемо в квадратурах.

**Доказательство**

Если переписать уравнение (7) в виде: $x^{q+2}y' = ax^{2q+2}y^2 + bx^{q+1}y + c$, добавить слагаемое $(q+1)x^{q+1}y$ к обеим частям уравнения:

$x[x^{q+1}y' + (q+1)x^q y] = ax^{2q+2}y^2 + (b+q+1)x^{q+1}y + c$ и ввести обозначение $z = x^{q+1}y$, то получится уравнение с разделяющимися переменными: $xz' = az^2 + (b+q+1)z + c$.

**Задача 5.** Решить уравнение $y' = x^2y^2 - \frac{y}{x} + \frac{2}{x^4}$.

Умножим уравнение на $x^4$: $x^4y' = x^6y^2 - x^3y + 2$; добавим к обеим частям $3x^3y$: $x(x^3y' + 3x^2y) = x^6y^2 + 2x^3y + 2$, и введем обозначение $z = x^3y$. Тогда: $xz' = z^2 + 2z + 2$. Поэтому, $arctg(z+1) = lnxC \Leftrightarrow (x^3y + 1) = lnxC$.

**6.** Как уже было отмечено, уравнения Риккати очень часто возникают при математическом моделировании различных явлений. В данном разделе демонстрируется одна из таких ситуаций.

**Задача 6.** Рассматривается уравнение Риккати, описывающее магнитотеллурический импеданс в одномерной геологической среде:

$$\frac{\sigma Z(z)}{\sigma z} - \sigma(z) Z^2(z) = i\omega\mu_0, \tag{8}$$

где $Z(z)$ – функция МТ-импеданса, зависящая от пространственной координаты $z$ (ось $Oz$ направлена в глубину Земли); $i$ – комплексная единица; $\omega$ – частота электромагнитного поля; $\mu_0$ – магнитная восприимчивость в вакууме; $\sigma(z)$ – электрическая проводимость среды [5].

Если $\sigma(z) = \sigma_0(1+pz)^{-2}$, $\sigma_0, p$ – некоторые положительные числа, то получаем частный случай уравнения (4):

$$Z' = \sigma_0 (1+pz)^{-2} Z^2 + i\omega\mu_0. \tag{9}$$

Разделим его на ($1 + pz$), и вычтем от обеих сторон уравнения: $\dfrac{pZ}{(1+pz)^2}$.

Тогда, $\dfrac{Z'}{1+pz} - \dfrac{pZ}{(1+pz)^2} = \dfrac{\sigma_0}{1+pz}\left(\dfrac{Z}{1+pz}\right)^2 + \dfrac{i\omega\mu_0}{1+pz} - \dfrac{pZ}{(1+pz)^2}$ =>

$$\Rightarrow \left(\frac{Z}{1+pz}\right)' = \frac{\sigma_0}{1+pz}\left(\frac{Z}{1+pz}\right)^2 + \frac{i\omega\mu_0}{1+pz} - \frac{p}{1+pz}\frac{Z}{1+pz}.$$

Обозначим $u = \dfrac{Z}{1+pz}$. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$u' = \frac{\sigma_0}{1+pz}u^2 - \frac{p}{1+pz}u + \frac{i\omega\mu_0}{1+pz} \text{ или } (1+pz)u' = \sigma_0 u^2 - pu + i\omega\mu_0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{\sigma_0 u^2 - pu + i\omega\mu_0} = \frac{dz}{1+pz}.$$

Отсюда, $u = \dfrac{\dfrac{-\sqrt{p^2+4k_0^2}}{\sigma_0}}{(1+pz)^{\frac{\sqrt{p^2+4k_0^2}}{p}} - 1} + \dfrac{p - \sqrt{p^2+4k_0^2}}{2\sigma_0}$.

Тогда, общее решение уравнения (9):

$$u = \frac{Z}{1+pz} \Rightarrow Z = u(1+pz) \Rightarrow Z =$$

$$= (1+pz)\left(\frac{-\sqrt{p^2+4k_0^2}}{\sigma_0}\frac{1}{(1+pz)^{\frac{\sqrt{p^2+4k_0^2}}{p}} - 1} + \frac{p-\sqrt{p^2+4k_0^2}}{2\sigma_0}\right).$$

**Заключение.** Дифференциальные уравнения являются важнейшим инструментом при моделировании явлений окружающей человека действительности. Как говорил великий ученый Лаплас: «Вся Вселенная с математической точки зрения представляет собой лишь огромную совокупность дифференциальных уравнений». Поэтому, умение их решать, интегрировать, как говорят математики, является необходимым условием для успешной исследовательской работы. К сожалению, современные учебники дифференциальных уравнений зачастую перегружены теоретическими сведениями, не имеющими прямого отношения к процессу решения уравнений. Надеемся, что наша работа, в которой описывается новый подход к решению уравнений Риккати, сможет в какой-то степени восполнить этот недостаток.

Поступила: 20.01.23; рецензирована: 03.02.23; принята: 07.02.23.

***Литература***

1. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. СПб.: Лань, 2003. 832 с.
2. *Boyce W.E.* Elementary differential equations and boundary value problems / W.E. Boyce, R.C. DiPrima. New York, Wiley, 2012. 832 p.
3. *Polyanin A.D.* Handbook of ordinary differential equations: Exact solutions, methods, and problems./ A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev // Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2017. 1496 p.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. СПб.: Лань, 2003. 576 с.
5. *Кыдыралиев С.К.* Преимущества метода цепочки при решении линейных дифференциальных и разностных уравнений / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 16–20.