УДК 517.968.7

К ВОПРОСУ О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К ПРОСТРАНСТВУ $L^2_g[t_0,\infty)$ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА – СТИЛТЬЕСА

Ж.О. Толубаев

На основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности решения линейного интегрального уравнения Вольтерра – Стилтьеса к пространству $L^2_g[t_0,\infty)$.

Ключевые слова: производная по возрастающей функции; линейное интегральное уравнение Вольтерра – Стилтьеса.

THE PROBLEM OF SPACE ACCESSORIES SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA – STIELTJE $L^2_g[t_0,\infty)$

Zh.O. Tolubaev

It is established based on the notion of the derivative of an increasing function and method of transformations of the equations sufficient conditions for the solution of linear integral equation of Volterra – Stieltjes to space $L^2_g[t_0,\infty)$.

Keywords: derivative with respect to increasing function; linear integral equation of Volterra – Stieltjes.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение типа Вольтерра – Стилтьеса

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)=f(t),\quad t\ge t_0, \tag{1}$$

где интеграл является интегралом Стилтьеса; $K(t,\tau)$, $f(t)$ – заданные при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$ непрерывные функции; $g(t)$ – заданная возрастающая непрерывная функция при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$, $x(t)$ – искомая функция.

Все фигурирующие функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$.

Вопросы ограниченности и принадлежности к пространству $L^2[t_0,\infty)$ решения интегральных уравнений типа Вольтерра методом преобразования уравнений исследованы в работах [1–7].

В данной работе будем использовать определение и теорему из [8]. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ определены на интервале (a, b). Будем предполагать, что функция $g(x)$ – строго возрастающая непрерывная функция на интервале (a, b). Возьмем точку $x\in(a, b)$. Зададим x приращение $\Delta x\ne 0$, тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ получат приращения $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ и $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Производной по $g(x)$ функции $f(x)$ в точке $x\in(a, b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta g(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{gx}(x)=\frac{df(x)}{dg(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{g(x+\Delta x)-g(x)}.$$

Теорема 1. Пусть $f(x)$ – непрервыная функция на сегменте (a, b) и

$$F(x)=\int_a^x f(t)dg(t),\quad x\in[a;b],$$

тогда $F'_{g(x)}(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dg(t)\right)'_{g(x)}=f(x),\quad x\in[a;b]$,

где $F'_{g(x)}(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{F(a+\Delta x)-F(a)}{g(a+\Delta x)-g(a)},\quad F'_{g(x)}(b)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{F(b+\Delta x)-F(b)}{g(b+\Delta x)-g(b)}$.

Доказательство. По определению производной по *g(x)* имеем:

$$F'_{g(x)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\int\limits_x^{x+\Delta x}dg(t)-\int\limits_x^{x+\Delta x}(f(x)-f(t))dg(t)\right)/\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]=f(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\psi(x,\Delta x),$$

где $\psi(x,\Delta x)=\left(\int\limits_x^{x+\Delta x}(f(x)-f(t))dg(t)\right)/\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]$.

Отсюда, учитывая, что *g(x)* – возрастающая функция на *[a, b]*, получим:

$$\left|\psi(x,\Delta x)\right|\le\left[\omega_{f(x)}(\Delta x)\left(\int\limits_x^{x+\Delta x}dg(t)\right)\right]/\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]=\omega_{f(x)}(\Delta x),$$

где $\omega_{f(t)}(|\Delta x|)$ – модуль непрерывности функции *f(x)*, т. е.

$$\omega_{f(x)}(\delta)=\sup_{|t-x|\le\delta}\left|f(x)-f(t)\right|.$$

Известно, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_{f(x)}(\delta)=0.$ Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\psi(x,\Delta x)\right|\le\lim_{\Delta x\to 0}\omega_{f(x)}(|\Delta x|)=0.$$

Аналогично доказываются и другие случаи.

Следовательно, $F'_{g(x)}(x)=f(x)$.

Теорема 1 доказана.

ЗАДАЧА. В данной работе рассматриваются и исследуются методом преобразований уравнений достаточные условия принадлежности к пространству $L^2_g\,[t_0,\infty)$ решения линейного интегрального уравнения (1) типа Вольтерра – Стилтьеса, где $x(t)\in L^2_g\,[t_0,\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}x^2(t)dg(t)<\infty\ .$$

Введем обозначения: *C [t,∞)* – пространство непрерывных функций на *[0,∞)*; *C(G)* – пространство непрерывных функций на $G=\{(t,\tau):t_0\le\tau\le t<\infty\}$.

Теорема 2. Пусть для линейного интегрального уравнения (1) выполняются следующие условия:

1) $K(t,t_0)\ge 0$ при $t\in[t_0,\infty)$, $K'_{g(t)}(t,s),K'_{g(s)}(t,s),K''_{g(t)g(s)}(t,s)\in C(G)$;

2) $K'_{g(t)}(t,t_0)\le 0$ при $t\in[t_0,\infty)$;

3) $K'_{g(\tau)}(t,\tau)\ge 0$ при $(t,\tau)\in G=\{(t,\tau):t_0\le\tau\le t<\infty\}$;

4) $K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)\le 0$ при $(t,\tau)\in G$;

5) $f(t)\in L^2_g[t_0,\infty)$.

Тогда решение уравнения (1) принадлежит пространству $L^2_g\,[t_0,\infty)$.

Доказательство. Применяя метод преобразования уравнений, рассмотренных в работе [1], и умножая уравнения (1) на *x(t)* и затем, интегрируя от t_0 до *t*, получим:

$$\int\limits_{t_0}^{t}x^2(s)dg(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)x(s)dg(\tau)dg(s)=\int\limits_{t_0}^{t}f(s)x(s)dg(s).\qquad(2)$$

Для вычисления двойного интеграла в уравнении (2) применяем следующие равенства:

1. $\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)x(s)\right]=K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)x(s)+K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)x(s),\ (s,\tau)\in G.$

Из последного тождества следует, что

$$K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)x'(s)=\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)x(s)\right]-K'_{g(\tau)}(x,s)z(s,\tau)x'(s), \tag{3}$$

где $z(s,\tau)=\int\limits_{\tau}^{s}x(\tau)dg(\tau).$ (4)

Из теоремы 1 следует

$$z'_{g(\tau)}(s,\tau)=-x(\tau), \tag{5}$$

$$z'_{g(s)}(s,\tau)=x(s). \tag{6}$$

2. $\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)x(s,\tau)\right]=K'_{g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)+2K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),\ (s,\tau)\in G.$

Из последнего тождества следует, что

$$K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z^2(s,\tau)\right]-\frac{1}{2}K'_{g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau), \tag{7}$$

где $K'_{g(\tau)}(s,\tau)$ – производная по возрастающей функции *g(t)* [8], т. е.

$$K'_{g(\tau)}(s,\tau)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{K(s,\tau+\Delta\tau)-K(s,\tau)}{g(\tau+\Delta\tau)-g(\tau)}.$$

Применяя формулы (3)–(7) к двойному интегралу в уравнении (2) и проинтегрировав методом по частям, имеем:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)x(s)dg(\tau)dg(s)=-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)x(s)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}x(s)\int\limits_{t_0}^{s}K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=-\int\limits_{t_0}^{t}z'_{g(s)}(s,\tau)\{K(s,\tau)z(s,\tau)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=s}-\int\limits_{t_0}^{s}z(s,\tau)K'_{g(\tau)}(s,\tau)dg(\tau)\}dg(s)=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}z'_{g(s)}(s,t_0)K(s,t_0)z(s,t_0)dg(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[K(s,t_0)z(s,t_0)z(s,t_0)]dg(s)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0)z(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}\frac{d}{dg(s)}[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)]dg(\tau)dg(s)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)]dg(s)+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d}{dg(s)}[K'_{g(\tau)}(s,\tau)z^2(s,\tau)]dg(s))dg(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)z^2(t,\tau)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)dg(\tau)dg(s).$$

Отсюда для двойного интеграла из (2) имеем:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)\,x(\tau)\,x(s)\,dg(\tau)\,dg(s)=\frac{1}{2}K(t,t_0)\,z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)\,z^2(s,t_0)dg(s)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)\,z^2(t,\tau)\,dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)\,dg(\tau)\,dg(s). \quad (8)$$

Учитывая формулу (8), из (2) получим:

$$\int_{t_0}^{t}x^2(s)\,dg(s)+\frac{1}{2}K(t,t_0)\,z^2(t,t_0)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(s)}(s,t_0)z^2(s,t_0)\,dg(s)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}K'_{g(\tau)}(t,\tau)\,z^2(t,\tau)\,dg(\tau)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z^2(s,\tau)\,dg(\tau)\,dg(s)=\int_{t_0}^{t}f(s)x(s)\,dg(s). \quad (9)$$

В силу условий теоремы 1) 2) 3) и 4) из уравнения (9) имеем:

$$\int_{t_0}^{t}x^2(s)dg(s)\le\left|\int_{t_0}^{t}f(s)x(s)\,dg(s)\right|. \quad (10)$$

Применяя неравенства Коши – Буняковского для интегралов к последнему интегралу в правой части неравенства и учитывая условие 5), получаем:

$$\left|\int_{t_0}^{t}f(s)x(s)\,dg(s)\right|\le\left(\int_{t_0}^{t}f^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}x^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Учитывая (11), из (10) имеем:

$$\left|\int_{t_0}^{t}f(s)x(s)\,dg(s)\right|\le\left(\int_{t_0}^{t}f^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}x^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\left(\int_{t_0}^{t}x^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_{t_0}^{t}f^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|t\to\infty|\Rightarrow\left(\int_{t_0}^{\infty}x^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_{t_0}^{\infty}f^2(s)\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x(t)\in L^2_g\,[t_0,\infty).$$

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 1. Для интегрального уравнения

$$x(t)+\int_{1}^{t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{s}+1\right)x(s)\,dg\left(\sqrt{s}\right)=f(t),\quad t\ge 1$$

выполнены все условия теоремы.

Здесь $t_0=1;\ g(t)=\sqrt{t};\ \ K(t,s)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{s}+1.$

1. $K(t,1)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{1}+1=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+2\ge 0;$

2. $K'_{g(t)}(t,s)=\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{s}+1\right]'_{g(t)}=(-1)\left(\sqrt{t}\right)^{-2}=-\dfrac{1}{t}\le 0;$

3. $K'_{g(s)}(t,s)=\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{s}+1\right]'_{g(s)}=1\ge 0;$

4. $K''_{g(t)g(s)}(t,s)=\left[K'_{g(t)}(t,s)\right]'_{g(s)}=\left[-\dfrac{1}{t}\right]'_{g(s)}=0;\qquad K''_{g(t)g(s)}(t,s)=0.$

ПРИМЕР 2. Для интегрального уравнения

$$x(t)+\int_1^t\left(\frac{1}{t^2}+s^2+2\right)x(s)\,dg\left(s^2\right)=f(t),\quad t\ge 0$$

выполнены все условия теоремы.

Здесь $t_0=1;\ \ g(t)=t^2;\ K(t,s)=\dfrac{1}{t^2}+s^2+2.$

1. $K(t,1)=\dfrac{1}{t^2}+1^2+2=\dfrac{1}{t^2}+3\ge 0\quad K(t,1)=\dfrac{1}{t^2}+3\ge 0;$

2. $K'_{g(t)}(t,s)=\left[\dfrac{1}{t^2}+s^2+2\right]'_{g(t)}=(-1)\left(t^2\right)^{-2}=-\dfrac{1}{t^4}\le 0;$

3. $K'_{g(s)}(t,s)=\left[\dfrac{1}{t^2}+s^2+2\right]'_{g(s)}=1\ge 0;$

4. $K''_{g(t)g(s)}(t,s)=\left[K'_{g(t)}(t,s)\right]'_{g(s)}=\left[-\dfrac{1}{t^4}\right]'_{g(s)}=0;\qquad K''_{g(t)g(s)}(t,s)=0.$

ПРИМЕР 3. Для интегрального уравнения

$$x(t)+\int_1^t\left(\frac{1}{t^6}+2s^3+5\right)x(s)\,dg\left(s^3\right)=f(t),\quad t\ge 1$$

выполнены все условия теоремы.

Здесь $t_0=1;\ g(t)=t^3;\ K(t,s)=\dfrac{1}{t^6}+2s^3+5.$

1. $K(t,1)=\dfrac{1}{t^6}+2\cdot 1^3+5=\dfrac{1}{t^6}+7\ge 0\quad K(t,1)=\dfrac{1}{t^6}+7\ge 0;$

2. $K'_{g(t)}(t,s)=\left[\dfrac{1}{t^6}+2s^3+5\right]'_{g(t)}=(-2)\left(t^3\right)^{-3}=-\dfrac{2}{t^9}\le 0;$

3. $K'_{g(s)}(t,s)=\left[\dfrac{1}{t^6}+2s^3+5\right]'_{g(s)}=2\ge 0;$

4. $K''_{g(t)g(s)}(t,s)=\left[K'_{g(t)}(t,s)\right]'_{g(s)}=\left[-\dfrac{2}{t^9}\right]'_{g(s)}=0;\qquad K''_{g(t)g(s)}(t,s)=0.$

Литература

1. *Искандаров С.* К вопросу о принадлежности пространству $L^2\,[t_0,\infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Фрунзе: Илим, 1980. Вып.13. С. 193–197.
2. *Искандаров С.* О принадлежности пространству $L^2\,[t_0,\infty)$ решения интегрального уравнения Вольтерра / С. Искандаров // Тез. докл. всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмушенных уравнений. Ч. I. Алма-Ата: Наука, 1979. С. 150–151.
3. *Искандаров С.* Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра / С. Искандаров // Изв. АН Киргиз. ССР. 1978. № 3. С. 30–33.
4. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.

5. *Винокуров В.Р.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра / В.Р. Винокуров // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, №10. С. 1732–1744.
6. *Цалюк З.Б.* Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений / З.Б. Цалюк // Математический анализ. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. С. 103–107.
7. *Цалюк З.Б.* Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтерра / З.Б. Цалюк, М.М. Шамсутдинов // Математический анализ. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. С. 63–71.
8. *Асанов А.* Система интегральных уравнений Вольтерра – Стилтьеса // Табигый илимдер журалы. Бишкек: Кыргызско-Турецкий ун-т “Манас”, 2003. С. 65–78.